வணிகப் புள்ளியியல்

[STATISTICS FOR COMMERCE]

சு. கருப்பையா



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 712

STATISTICS FOR COMMERCE

S. KARUPPIAH

Price Rs. 6-55

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
Nathan & Company,
Main Road, Velacheri,
Madras—600 042

பதிப்புரை

வணிகப் புள்ளியியல் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 712ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 747 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்.

பொருளடக்கம்

1. அறிமுகம்

புள்ளிவிவரங்களைப்பற்றிய இயல், புள்ளியியல் ஆகும். புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் பல முறைகளைப்பற்றியும், சேகரிக்கப் பட்ட புள்ளிவிவரங்களைப் பாகுபடுத்திப் பட்டியலில் அமைக்கும் முறைகளைப்பற்றியும், அவைகளை விளக்கப் படங்களில் படைத்துத் தெளிவுபடுத்தும் பாகங்கள், பின் அவ் விவரங்களுக்கு விளக்கம் காணும் முயற்சிகள், எதிர்காலத்தின் மதிப்பீட்டு முறைகள் ஆகியன பற்றியும் அது பேசுகிறது.

மனிதன் ஈடுபட்டுள்ள எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆராயப்படுகின்றன. நவீன காலத்தில் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படாத துறைகளே இல்லையெனலாம். பல்லாண்டுகளுக்கு முன்பெல்லாம், நாட்டினை ஆளுகின்ற அரசாங்கத்திற்கு மட்டுமே புள்ளிவிவரங்கள் தேவைப்பட்டன. நாட்டிலுள்ள மனிதச் சக்தி அளவினை அறிந்துகொள்ளவும், நாட்டு மக்களுக்குத் தேவையான உணவு போன்ற தேவைகளின் உற்பத்தி அளவினைத் தெரிந்துகொள்ளவும், அவர்களுள் பிணியாலும் மூப்பாலும் தொல்லைப்படுபவர், தொல்லைப்பட்டு இயற்கையெய்து பவர் ஆகியவர்களின் எண்ணிக்கையை அறிந்துகொள்ளவும், அற்றைய அரசாங்கங்கள் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்து ஆராய்ந்தன. ஆனால், இற்றைய நவீன விஞ்ஞான காலத்தில், அரசாங்கம் மட்டுமன்றிப் பல்கலைக்கழகங்கள், கலைக்கூடங்கள், மருத்துவ விடுதிகள், திட்டக்குழுக்கள், ஆராய்ச்சிக் கழகங்கள் முதலிய பல்வேறு நிறுவனங்கள் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கத் தொடங்கியதோடன்றி, அதன் ஆய்வுக்கேற்ற பல உயர்கணித முறை வழி துறைகளையும் கண்டு வருகின்றன. இத் துறையில் பல கணித வல்லுநர்களின் தொண்டு மிகச் சிறந்ததாகும். பெர்நௌலி, ஹாஸ், லாப்லாஸ், கார்ல் பியர்ஸான், ஆர். எ. வ்பஸர் போன்ற கணிதப் பேராசிரியர்கள் புள்ளியியலை மிக உயர்ந்த நிலைக்கு வளர்த்துள்ளனர். பிற துறைகளில் பெரிதும் பயன் படுத்தப்படும் புள்ளியியல் (Applied Statistics), கணித அடிப் படையில் எழுந்து வளர்ந்துள்ள தூய புள்ளியியல் (Pure Statistics) என இருவகையாக இணைந்து அது பெரிதும் வளர்ந்துள்ளது.

புள்ளியியல் – விளக்கம்

புள்ளியியல் என்ருல் என்ன? பல்வேறு ஆசிரியர்கள் வெவ்வேறு விளக்கங்கள் தந்துள்ளனர். 'சராசரிகளின் அறிவியல்' என்றும், 'எண்ணிக்கையின் அறிவியல்' என்றும் பௌலி என்ற ஆசிரியர் இதற்கு வெவ்வேறு விளக்கம் தந்துள்ளார். 'பல்வேறு பட்ட சூழ்நிலேகளால், குறிப்பிடத்தக்கவளவு பெரிதும் பாதிக்கப் பட்ட எண் அளவை விவரம்' என யூல் என்பார் விளக்கமளித் துள்ளார். 'நேரில் கண்டு சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களே அறிவால் பாகுபடுத்தும் அறிவியல்' எனவும் விளக்கம் தரப் பட்டுள்ளது.

எனினும், கிராக்ஸ்டன், கௌடன் என்பார் தந்த விளக்கத் தையே மிகப் பொருத்தமானதாகக் கருதலாம். ('புள்ளிவிவரங் களேச் சேகரித்தல், படைத்தல், பகுத்துணர்தல், விளக்கம் காணுதல்' என அவர்கள் விளக்கியுள்ளனர். இவை அனைத்தும் சேர்ந்ததுதான் புள்ளியியலாகும்.) புள்ளியியல் என்பது ஓர் அறிவியலன்று; அறிவியல் முறையாகும். அண்மைக் காலத்தில், புள்ளியியலில் ஏற்பட்ட முன்னேற்றம் சமவாய்ப்புக்கூறு கணிதமும், சோதனேகளின் உருவக அமைப்புகளுமாகும். சமவாய்ப்புக் கூறின் (Random Sample) இயல்பினேக்கொண்டு, அத்தகு கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதி அல்லது இனத் தொகுதியின் (Population) இயல்பினேயும் தன்மையையும் அறிய முடிகிறது. மேலும், அவ்வாறு முழுமைத் தொகுதியின் சிறப்பினே மதிப்பிடும்போது, ஒரு கூறிலிருந்து பெறப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் இயல்பிற்கும், வேருெரு கூறிலிருந்து பெறப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் இயல்பிற்குமுள்ள வேறுபாட்டினேயும், அவ் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கவளவிற்கு மிகையானதா, தள்ளத் தக்கவளவிற்குச் சிறியதா எனவும் காணப்படுகிறது.

புள்ளியியல் பயன்படும் துறைகள்

வளர்ந்தோங்கிய இன்றைய புள்ளியியல் பயன்படாத துறை எதுவுமேயில்லே எனத் திட்டவட்டமாகக் கூறலாம். மனித அறிவு எட்டும் எல்லாத் திக்குகளிலும் இது பயன்படுகிறது. பொருளாதாரத் துறையில் இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. உயர்ந்த பொருளாதாரத் தேற்றங்களும் கொள்கைகளும் புள்ளியியல் அடிப்படையில் எழுந்துள்ளன. பொருளாதாரக் கொள்கைகள் புள்ளியியல் செங்கற்களால் கட்டப்படுகின்றன. மேலும், புள்ளியியல் பொருளாதாரத்தின் ஓர் அறிவியல் பாடமாக உருவாகி வருகின்றது. கணக்கியலும், புள்ளியியலும் இணைந்து

ஏற்பட்ட பொருளாதாரத் துறையொன்று புதிதாக எழுந்துள்ளது. இது தவிர, வேதியியல், இயற்பியல், புவியியல், வானவியல், விலங்கியல், உயிரியல், உளவியல், மருத்துவவியல் போன்ற எல்லா அறிவியல் துறைகளிலும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது. வம்சவழி விதிகளை நிர்ணயிக்க உடலியலிலும், கால நிலையை முன் கூட்டியே அறிவிக்கப் பருவநிலையியலிலும் புள்ளியியலைப் பெரிதும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

வணிகவியலில் புள்ளியியல்

மனிதனின் தேவைப்பொருள்களை உற்பத்திசெய்யும் தொழிற்சாலைகளையும், அப் பொருள்களையும் தானியங்களையும், பிற உணவுப் பண்டங்களையும் விற்பனைசெய்யும் விற்பனைத் தளங்களையும், இவற்றுக்காகப் பணம் கைம்மாற்றுச் செய்யும் வங்கிகளையும் வணிகவியல் (Commerce) விவரிக்கிறது. பண்டங் களின் உற்பத்தி, மேற்பார்வை நிர்வாகம், (Management) பண்டங்களை விற்பனைத் தளங்களில் விற்பனை செய்வதற்குரிய மேற்பார்வை நிர்வாகம், இவற்றிற்குரிய பண வசதியினை மேற் பார்வை செய்யும் நிர்வாகம், இத் துறைகளில் ஈடுபடும் பணி யாளர்களை மேற்பார்வை செய்யும் நிர்வாகம் ஆகியன வாணிகத் தில் இயங்கும் செயல்களாகும். பண்டைக் காலத்தில், இச் செயல்களை எளிதாக மேற்கொண்டனர்; ஆனால், வலுத்த போட்டிகள் ஏற்பட்ட இன்றைய வாணிகச் சூழ்நிலையில் இவைகளை எளிதாக நிர்வகிக்க முடியாது. இவைகள் அனைத்திலும் திட்ட மிட்ட செயல்களும் (Planning), கட்டுப்பாடான போக்குகளும் (Control) மிகமிக அவசியமாகும்.

பண்டங்களின் உற்பத்தித் துறைகளிலும், விற்பனைத் தளங்களிலும், வங்கிகளிலும் புள்ளியியல் மிகப் பரவலாகப் பயன் படுத்தப்படுகின்றது. எதிர்காலத்தில், உற்பத்தி செய்யப்படும் பண்டங்களின் தேவை நிலையையும், விற்பனை நிலையையும் முன் கூட்டியே அனுமானிக்கும் திறன் (Forecasting) வெற்றிகரமான ஒரு வணிகத்திற்கு இன்றியமையாததாகும். பண்டங்களின் பருவகால மாறுதல்களையும் (Seasonal Variation), வணிகச் சுழல்வட்டப் போக்குகளையும் (Trade Cycles), அதன் மோதல் களையும் பலன்களையும், மக்களின் பழக்கவழக்கங்கள், நடை உடை, இன்னபிற வேட்கைப் பாவனைகளால் ஏற்படும் மாறுதல் களையும் கருத்தில்கொண்டு எதிர்காலத்தில் எந்த அளவிற்குப் பண்டங்களை உற்பத்தி செய்யவேண்டுமென்பதை ஓர் உற்பத்தி யாளர் மதிப்பீடு (Estimation) காண்பதற்குப் புள்ளியியல் முறைகளே பயன்படுகின்றன. இனி, உற்பத்தி செய்யப்படும்

பண்டங்கள் சீரான தரமானதாக அமைவதற்குப் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டு முறைகள் (Statistical Quality Control) தாம் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இம் முறைகள் பயன்படுத்தப்படாத தொழிற்சாலைகள் இன்று எங்கும் காணுதல் அரிது எனத் திட மாகக் கூறலாம். நம் நாட்டில் SQC நிறுவனங்கள், கல்கத்தா, பம்பாய், பங்களூர் ஆகிய நகரங்களில் இயங்கி வருகின்றன. 'கூறு முறைகள்' (Sampling Methods) இங்குப் பெருமளவிற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எந்தெந்தக் காலத்தில் உற்பத்தியைப் பெருக்கவேண்டும், எந்தெந்தக் காலத்தில் குறைக்கவேண்டும், எந்தெந்தக் காலங்களில் அது பல்வேறு காரணங்களால் பாதிக்கப் படுகின்றது, அதனைத் தடுப்பதற்குரிய வழிமுறைகள் போன்ற வற்றை மதிப்பீடு செய்வதற்கும், அனுமானிப்பதற்கும் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

விற்பனைத் தளங்களிலும், மார்க்கெட்டுகளிலும் புள்ளியியல் முறைகள் கையாளப்படுகின்றன. மக்களுக்குத் தேவையான பொருள்களையும், பண்டங்களையும் கொள்முதல் செய்து சேமித்து வைக்கும் அளவைத் தீர்மானிக்கவும், விலை ஏறும் இறங்கும் காலங்களைத் தீர்மானிக்கவும் புள்ளியியல் வழிமுறைகள் கையாளப் படுகின்றன. பொருள்களைக் கிடங்குகளில் சேமித்து வைத்தலும், உரிய காலத்தில் விற்பதும்தான் வேண்டிய இலாபம் தரும். வணிகத்தின் இலட்சியமே இலாபம்தானே! கொள்முதல் செய்யப் படும் பண்ட அளவு, கால அளவு, விற்பனை செய்யவேண்டிய நேரங்கள் முதலியவற்றைத் தீர்மானிக்கப் பல்வேறு ஆண்டுகளில் கூறுமுறைகளால் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் பயன்படு கின்றன. விற்பனைக்குரிய பல்வேறு பண்டங்களின் விலைகளைத் தீர்மானிக்கக் கையாளப்படும் கலைநுண் முறைகள் (Techniques) பற்றிப் பேசுவது விலைக் கணிதம் (Cost Accounting) ஆகும். விலைக் கணிதம் முழுவதும் புள்ளியியல் அடிப்படையிலேயே இயங்கி வருகிறது.

வங்கியாளர்களும், சேமிப்புக் கைப்மாற்றுத்தரகர்களும், பண முதலீடு செய்பவர்களும், இன்ஷ்யூரன்ஸ் கம்பெனிகளும் புள்ளிவிவரங்களையும் அதன் வழிமுறைகளையும் பெரிதும் பயன் படுத்துகின்றனர். பல்வேறு வணிகத் துறைகளில் செய்திகளைச் சேகரிப்பதற்கும், அதனை ஆய்வதற்கும் பொதுவான பொரு ளாதார நிலையை அறிவதற்கும் வங்கிகள் புள்ளியியல் வழிமுறை களையே பயன்படுத்துகின்றன. வணிகத்தின் ஒவ்வொரு துறை யிலும், பண்டங்களின் விற்பனை நிலையையும், வணிகர்களின் பொருளாதார நிலையையும் வங்கிகள் அறியவேண்டும். உள் நாட்டு, வெளிநாட்டுப் பண மார்க்கெட்டுகளால், வணிகநிலை

எவ்வாறு பாதிக்கப்படுகின்றது என்பதனை வங்கிகள் அவ்வப் போது அறிதல்வேண்டும். வணிகநிலைக்கேற்ப வங்கிகளின் நிதி நிலைமை பாதிக்கப்படும். வங்கிகள், பணக்கடன் வழங்குதலில் மிகக் கவனமாக இருத்தல்வேண்டும். வணிகமும் வியாபாரமும், பணவீக்கத்தால் பாதிக்கப்பட்ட நிலையில், வங்கிகள் அதிக அள விற்குக் கடன்தரமாட்டா. வணிகநிலையைச் சரியாக அறிந்து இயங்காத வங்கிகள் தோல்வியடையும். இன்னும், இது போன்ற வங்கிகளின் பணிகள் அனைத்திற்கும், புள்ளிவிவரங்களும், புள்ளி விவர வழிமுறைகளைக் கையாளப்படும் திறனும் தேவைப்படு கின்றன.

பணமுதலீடு செய்பவர்கள், இலாபம் தரத்தக்க, சரியான பாதுகாப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்து முதலீடு செய்தல்வேண்டும். குறிப்பிட்ட ஒரு தருணத்தில் பண்டங்களை வாங்குவதா, விற்பதா அல்லது இரண்டும் செய்யாமலிருப்பதா என்ற நிலைகளை யெல்லாம் தீர்மானிக்கப் புள்ளியியல் முறைகள் உதவுகின்றன. புள்ளியியலையும், அதன் வழிமுறைகளையும் பயன்படுத்துகின்ற பணமுதலீடு செய்பவர்களில் வங்கியாளர்களே முதலானவர். புள்ளியியலின் துணையால், நல்ல, கெட்ட பாதுகாப்புகளைப் பரிசீலனை செய்து தேர்ந்தெடுக்க முடிகிறது.

இன்ஷ்யூரன்ஸ் கம்பெனிகளால் புள்ளியியல் பயன்படுத்து மளவு மிகப் பரந்ததாகும். ஆயுள்கால அளவு விகிதத்தினைத் தீர்மானிப்பதிலும், கம்பெனிகளின் அலுவலைப் பெருக்கிக்கொள் வதிலும் பாலிஸிதாரர்களுக்கு அதிகப் பலன்களை நல்குவதிலும், அவர்களின் எண்ணிக்கையைப் பெருக்குவதிலும், புள்ளியியல் முறைகள் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புள்ளியியல் கலந்த ஆக்ட்யுரிஸ் (Actuaries) என்ற பகுதி இன்ஷ்யூரன்ஸில் தவணைத் தொகைகளையும், இன்ன பிறவற்றையும் கணிப்பதில் நன்கு சிறப்புறப் பயன்படுகிறது.

புள்ளிவிவரம் சேகரித்தல், பாகுபடுத்தல், பட்டியலில் இடுதல், பண்பளவைகள் காணுதல், வரைபடங்கள் வரைந்து விளக்கம் காணல், மதிப்பிடல், கூறுவாய்ப்புக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தல், தரக்கட்டுப்பாடு நிர்ணயம் செய்தல், வளைவு கோடுகள் பொருத்துதல், காலத்தொடர்களைப் பரிசீலனை செய்தல், விலைக்குறியீட்டெண்கள் காணுதல், இடைச்செருகல், வெளிச் செருகல் காணுதல், ஒட்டுறவு காணுதல், ஒட்டுறவுக் கோடுகளைப் பொருத்துதல் முதலிய எல்லாப் புள்ளியியல் வழிமுறைகளும் வணிகவியலில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

இவைகள் அனைத்தையும் நோக்குங்கால், வணிகத்துறை வாழ்க்கையின் இரத்த ஓட்டமே புள்ளிவிவரங்களின் ஆய்வுதான் எனக் கூறினால் மிகையாகாது.

ஆதார விதிகள்

இனி, புள்ளியியலுக்கு ஆதாரமாக இரு விதிகளை இங்குக் காண்போம். அவை, புள்ளியியல் ஒழுங்குவிதி (Law of Statistical Regularity), பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதி (Law of Inertia of Large Numbers) என்பனவாகும். நவீனப் புள்ளியியல் வளர்ச்சியின் அங்கங்களான கூறுகளின் தேற்றக் கொள்கைகளும், சோதனை உருவக அமைப்புகளும் குறைந்த செலவில் மிகுந்த செய்தியினைச் சேகரிப்பதற்கு உறுதுணையாக அமைகின்றன. இவை, புள்ளியியலின் ஒழுங்குவிதியின் அடிப்படையில் வளர்ந்தனவாகும். வியக்கத்தருமளவிற்கு, வாழ்க்கையின் எல்லாத் துறைகளிலும், இயற்கை நிகழ்ச்சிகள் ஓர் ஒழுங்கு நியதியோடு இயங்குவதைக் காணலாம். ஓர் அறுமுகப் பகடையை ஆயிரம் தடவைகள் வீசினால், ஒவ்வொரு முகமும் ஏறத்தாழச் சமதடவைகளில் பிறழ் வதைக் காணலாம். ஒரு நூறு ஏக்கர் நிலத்தில் உள்ள தென்னை மரங்களில், சமவாய்ப்புக்கூறாக அமைந்த நூறு மரங்களில் விளைந்த தேங்காய்களின் கூட்டுச் சராசரி எண்ணிக்கையே, அந்த நில முழுமைக்குமுள்ள கூட்டுச் சராசரி எண்ணிக்கையாக அமைவதைக் காணலாம். ஒரு பல்கலைக்கழகத்தினைச் சார்ந்த ஆயிரம் மாணவர் களில், சமவாய்ப்புக்கூறாக அமைந்த ஒரு குழு மாணவர்களின் சராசரித் தரம், உயரம், பருமன் முதலியன அத்துணை மாணவர் களின் சராசரி அளவைகளாக அமைவதைக் காணலாம். சம வாய்ப்புக் கூறு ஒன்று, முழுமைத் தொகுதியின் எல்லாப் பண்பு களையும் பிரதிபலிக்கின்றது எனக் கூறலாம். மேற்கண்டவை போன்று ஒழுங்குவிதி இயங்கும் எண்ணற்ற மாதிரிகளை நாம் எளிதில் காணமுடியும்.

இரண்டாவது விதி, பெரிய எண்களின் நிலைத்தன்மை விதி யாகும். நம் நாட்டின் ஒரு பகுதியில் பருவமழை தவறி உற்பத்தி குறையலாம்; வேறொரு பகுதியில் நல்ல விளைவு ஏற்பட்டு, மொத்தத்தில் நிகர உற்பத்தியில் எந்தவித மாறுதலுமில்லாமல் சாதாரணச் சூழ்நிலை நிகழ்வதைக் காணலாம். ஓர் ஆண்டில், ஓர் இராச்சியத்தின் ஒரு பகுதியில் தொற்றுநோயால் பலர் இறந்துவிடக்கூடும்; வேறொரு பகுதியில் அதிகக் குழந்தைகள் பிறக்கலாம். அந்த ஆண்டில் அந்த இராச்சிய மக்கள்தொகை குறிப்பிடத்தகுந்த அளவிற்கு மாறுமலிருப்பதைக் காணலாம். ஒரு சில இடங்களில் ஏற்படுகின்ற எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள், வேறு

சில இடங்களில் நிகழும் நேர்மறை நிகழ்ச்சிகளால் சரிசெய்யப் பட்டு, நிகர முழு எண் மாறுத்தன்மையிலிருப்பதைக் காணலாம். இந்த விதியைக் கடைப்பிடித்துத்தான், ஆயுள் இன்ஷ்யூரன்ஸ் கம்பெனிகள் இயங்குகின்றன.

புள்ளியியலின் வரம்பு

புள்ளியியலைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஒரு வரம்பும் வரையறையும் உள்ளது. எல்லா நிலைகளிலும் பயன்படுத்துவது தவறான முடிவுக்கு இழுத்துச் சென்றுவிடும். எண் கூட்டங்களைச் சேகரித்துப் பாகுபடுத்தி விளக்கம் காணுகின்ற முயற்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் புள்ளியியல் வழிமுறைகளைச் செவ்வனே பயன் படுத்தவேண்டும். பின், கூறு காணுகின்ற நிலைகளிலும், பண்பளவைகள் ஏற்றதாகக் காணப்படுகின்ற தறுவாயிலும், ஒப்பிட்டு நோக்கி ஒட்டுறவு காண்பதிலும், முடிவு கண்டு விளக்கம் தெளிந்து, எதிர்காலத்திற்கு மதிப்பீடு கணிக்கின்ற எல்லாப்படியான நிலைகளிலும், மிகுந்த கவனத்துடன் முறை பிறழாது புள்ளியியலைப் பயன்படுத்தவேண்டும். ஒன்றுக்குப் பயன்படும் ஒருவிதப் பண்பளவையைப் பிறிதொன்றுக்குப் பயன்படுத்துவது தவறாகும்.

புள்ளியியலின் வழிமுறைகள், எண்களால் செய்யப்படும் விவரங்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும். உடல்நலம், ஒழுக்கத் தன்மை, ஏழ்மை போன்ற பண்புகள் எண் வடிவத்தில் கூறப் படாத நிலைகளில், புள்ளியியலின் வழிமுறைகள் பயன்படா. புள்ளியியலைத் தவறாகக் கையாள்வதற்கு நிறைய வாய்ப்புகள் உள்ளன. அத்தகு வாய்ப்புகளை நீக்கவேண்டும். அத்தகு வாய்ப்புகளைப் பயன்படுத்தி, ஒருசில கட்சி அரசியல்வாதிகளும், சில விளம்பரதாரிகளும் தங்கள் சொந்த நலனுக்காக மெய் நிலையைத் திரித்து வேறுபடுத்திப் பொய்ப்படம் காட்டுவர். ஒரு சூழ்நிலைக்குக் கண்ட புள்ளிவிவரத்தினைப் பிறிதொரு சூழ்நிலைக்குப் பயன்படுத்துவர். இத்தகையாளர்களின் எண்ணிக்கை நாட்டில் பெருகிவருவதன் காரணமாகவே, புள்ளியியலைச் சாதாரண மக்கள் நம்புவதற்குத் தயங்குகின்றனர். 'புள்ளிவிவரமே சுத்தப் பொய்' என மிகையாகக் கருதுவாருமுளர். இது அறியாமையாகும்! எய்தவர் ஒருவரிருக்க, அம்பை நொந்து என்ன பயன்? 'புள்ளிவிவரங்களைக்கொண்டு எதனையும் எப்படியும் நிறுவலாம்' எனக் கருதுவாருமுண்டு. இதுவும் தவறாகும். அறிவியல் வாயிலாகக் காணுகின்ற முடிவு ஒன்றாக இருக்கவேண்டுமேயல்லாது பல்வேறு வகையாக இருக்க முடியாது! புள்ளியியலைச் செவ்வனே பயின்றாரல்லாது, பிறர் கையில் புள்ளியியல் இருப்பது ஓர் ஆபத்தான கருவியாகும்!

கணக்கியல் வழிமுறைப்படி புள்ளிவிவரங்களையும் புள்ளியியலையும் கையாண்டால், அது நாட்டை வளமுள்ள பொற்காலத்திற்கு இழுத்துச்செல்லும் வண்டியின் சிறந்த அச்சாக அமையுமென்பதில் எவ்வித ஐயமுமில்லை. இன்று வியக்கத்தக்க அளவில் வளர்ந்துள்ள பல அறிவியல்கள் புள்ளியியல் துணை கொண்டு வளர்ந்துள்ளன எனக்கூறினால் மிகையாகாது. மேலும், ஆய்வில் நாட்டங்கொண்ட நன்மாணவருக்குப் புதுப்புதுத் தேற்றங்களையும் மெய்க்கூற்றுகளையும் காண இது விரிந்து பரந்து கிடக்கும் ஓர் அறிவுத்தளமெனக் கூறினாலும், அது மிகையாகாது.

பயிற்சி

1. புள்ளியியல் என்றால் என்ன என்பதற்குரிய விளக்கம் தருக.

2. புள்ளிவிவரம், புள்ளியியல் பற்றிய கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை ஆய்ந்தெழுதுக:

   (அ) 'புள்ளியியல் என்பது எண்ணிக்கையின் அறிவியல்'. (ம.ப.)

   (ஆ) 'பல்வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளால் குறிப்பிடத்தக்க அளவு பெரிதும் பாதிக்கப்பட்ட எண் அளவை விவரம்.' (செ.ப.)

   (இ) 'புள்ளிவிவரங்கள் ஒவ்வொருவரையும் பாதிக்கிறது. வாழ்க்கையின் பல நிலைகளை அது தொடுகிறது. புள்ளியியல், அறிவியல் கலையியல் ஆகிய இரண்டுமாகும்.' (செ.ப.)

   (ஈ) 'இது ஒரு புள்ளிவிவரக் காலமாகும்; புள்ளியியல் உதவியினால் சிறந்ததொரு தீர்வு காண முடியாத எந்தவோர் அரசாங்க, தொழில், வணிகப் பிரச்சினையும் இல்லை.' (செ.ப.)

   (உ) 'புள்ளிவிவரங்கள் பொய் பேசமாட்டா.'

   (ஊ) 'புள்ளியியலால் எதனையும் நிறுவலாம்.'

   (எ) 'மெய்கலந்த பொய்கள், சுத்தமான முழுப் பொய்கள், புள்ளியியல் காட்டும் விவரங்கள் எனப் பொய்கள் அமைகின்றன.'

3. பல்வேறு துறைகளில் புள்ளியியல் பயன்படும் தன்மையையும், அதன் உபயோகத்தையும், வரம்பினையும் விளக்குக. (செ.ப.)

4. வணிகத்துறையிலும் தொழிற்கூடங்களிலும் புள்ளியியலின் பயன்களைப்பற்றி ஒரு சிறுகட்டுரை வரைக. (செ.ப.)

5. ஓர் இயற்பியல் அல்லது வேதியியல் நிபுணரோடு ஒப்பிட்டு நோக்கும்போது, புள்ளியியல் நிபுணர் சமுதாய அறிவியல்களில் (Social Sciences) எதிர் நோக்குகின்ற இடர்ப்பாடுகளை விளக்குக.

6. புள்ளியியல் ஆதார விதிகளைப்பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக. (செ.ப.)

குறிப்பு: மாணவர் இவ் வத்தியாயத்தினை முதல்முறையாகப் படிக்கும்போது முழுவதும் தெளிவாக நன்கு புரிந்துகொள்ள இயலாமல் போகலாம். புள்ளியியல் பகுதிகள் அனைத்தையும் படித்து முடித்தபின், இதனை மீண்டும் படிப்பின் தெளிவாகப் புரியும். பாடப்பகுதிகள் அனைத்தும் கற்றுத்தேர்ந்த பின்னர், மாணவர் மேற்கண்ட கேள்விகளுக்கு விடை எழுதிப்பழக முயலலாம்.

2. சேகரித்தல், பாகுபடுத்தல், பட்டியலிடுதல்

புள்ளிவிவர ஆய்வுத்தளங்கள் யாவை என்பதனையும் அதன் விளக்கங்களையும் இங்குக் காண்போம். புள்ளிவிவர ஆய்வினை மேற்கொள்ளும் ஒருவருக்குப் புள்ளிவிவரங்களும், அதன் பாகுபாட்டுத் தன்மையும், பட்டியல் அமைப்பும், விளக்கப்படங்களும் அவரது ஆய்வின் அடித்தளங்களாக அமைகின்றன.

ஆய்வின் நோக்கம்

முதலாவதாக அமைவது புள்ளிவிவரங்கள். அதனை முதலில் பெறுதல்வேண்டும். அதனைப் பெறுவதற்குப் பல வழிமுறைகள் உள. எம் முறையில் அதனைப் பெறுவது என்பதனை முதலில் உறுதிபடுத்திக்கொள்ளவேண்டும். அவ் வுறுதி கொள்வதற்குக் கருவியாக அமைவது ஆய்வாளரின் நோக்கமாகும். எந்த நோக்கத்திற்காகப் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பதை முதலில் நன்கு ஐயம் திரிபின்றித் தெளிவாகத் தெரிந்து கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், ஒரு நோக்கத்திற்காகச் சேகரிக்கப் பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் வேறொன்றுக்கும் பயன்படலாம் அல்லது பயனற்றுப் போகலாம் அல்லது ஒரு பகுதி பயன்பட்டு எச்சப் பகுதி பயன்படாமல் போகலாம். நோக்கத்தில் ஏற்படுகின்ற சில மாறுதல்கள்கூடப் புள்ளிவிவரத்தினைச் சேகரிக்கும் வழி முறையையே மாற்றி அமைத்துவிடக்கூடும். பண்டங்களின் முதற் கட்ட அல்லது உற்பத்திக்கட்ட விலைக் குறியீட்டு எண்ணினைக் (Index Number) காணவேண்டிச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள், வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைக் காணப் பயன் படமாட்டா; ஏனெனில், வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணிற்குச் சில்லறை விற்பனைக்கட்ட நிலையில் உள்ள பண்ட விலைகள்தாம் வேண்டும். இனி, நோக்கத்தில் தெளிவில்லையெனில், காலமும், பணமும், கருவிகளும் விரயமாகும். நோக்கத்தில் தெளிவிருப்பின் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கின்ற முறைகளையும், அதற்குப் பயன்படும் கருவிகளையும் (காலம், பணம், ஆள்கள் முதலியன) திட்டவட்டமாகக் கணிக்கமுடியும்.

சேகரிக்கும் வழிமுறைகள்



நோக்கத்தினைத் தெளிவாகக்கொண்ட பின், அதற்குப் பயன் படும் புள்ளிவிவரங்களை எவ்வாறு சேகரிப்பது என்ற கேள்வி எழும். அத்தகைய புள்ளிவிவரங்கள் ஏற்கெனவே சேகரிக்கப் பட்டு முழு நிலையிலோ, அம் முழுநிலையின் ஒரு பகுதியாகவோ அமையலாம். எனில், தொல்லையின்றி அதனை அப்படியே கையாண்டு கொள்ளலாம். இத்தகைய புள்ளிவிவரங்களை **இரண்டாம்தரப் புள்ளிவிவரங்கள்** எனவும், அவ்வாறு புள்ளி விவரங்களைப் பெறும் தன்மைக்கு **இரண்டாம்தரச் சேகரிப்பு முறை** எனவும் சொல்லலாம். இம் முறையில் உற்றுக் கவனிக்கத்தக்கது ஒன்றுளது. அங்ஙனம் ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள், சரியான புள்ளியியல் முறைப்படி சேகரிக்கப்பட்ட நம்பத்தகுந்த புள்ளிவிவரங்கள்தாமா என்பதை முதலில் நன்கு ஆய்ந்து தெளிவுபடுத்திக் கொள்ளவேண்டும். எஸ். எஸ். எல்.சி. சோதனையில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் தேறியவரின் மதிப் பெண்கள் ஓர் ஆய்விற்கு வேண்டுமெனில், அதனை நேரடியாகச் சேகரிக்க முற்படவேண்டுவதில்லை; அந்த இராச்சியக் கல்வித்துறை அலுவலகத்தில் எளிதாகப் பெறலாம்.

வேறு சில புள்ளிவிவரங்கள் இவ்வாறு எளிதில் கிடைப்ப தில்லை. அவற்றினை ஆய்வாளர் நோக்கத்திற்கேற்ப நேரடியாகச் சேகரிக்க முற்படல் வேண்டும். மக்கள்தொகைக் கணிப்பு (Census), பத்தாண்டிற்கு ஒருதரம் இம் முறையில்தான் செயல் படுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு நேரடியாகச் சேகரிக்கும் முறை **முதல்தரச் சேகரிப்பு முறை** எனவும், அத்தகைய புள்ளிவிவரங்கள் **முதல்தரப் புள்ளிவிவரங்கள்** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய புள்ளிவிவரங்களை ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சேகரிக்க லாம்; அல்லது சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து வினாப்பட்டியல் மூலமாகச் சேகரிக்கலாம்; அல்லது வினாப்பட்டியலை அஞ்சல் வாயிலாக அனுப்பிப் பதில்கள் பெறலாம்; தொலைபேசிமூலமாகத் தொடர்புகொண்டும் சேகரிக்கலாம்.

புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படவேண்டிய மூல இடம் மிகச் சிறியதாக தனிநபர் ஒருவரால் எளிதில் அடையத்தக்க தன்மையில் அமைந்தால், ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சேகரிப்பதில் கடினமில்லை. ஆனால், மிகப் பெரிய ஆய்வாகவும், புள்ளி தருமிடங்கள் பரந்தும் அமையுமெனில், பல சேகரிப்பாளர்களை நியமித்து, அவர்கள் மூலமாகத்தான் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட வேண்டும். இவ்விரு வழிகளிலும் மிகமிக முக்கியப் பங்குபெறுவது வினாப்பட்டியலாகும்.

வினாப்பட்டியல்

ஆய்வின் நோக்கத்திற்கேற்ப வினாப்பட்டியல் நன்கு தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும், வேண்டிய செய்திகள் அனைத்தும் பெறும்வண்ணமும் அமைதல்வேண்டும். ஆய்வாளரே சேகரிக்கின்ற முறையில் இப் பட்டியல் சற்றுச் சிக்கலாகவும் நீண்டும் அமையலாம். வினாக்களை, ஆய்வாளரே விளக்கிப் பகர்ந்து பதில்கள் பெறமுடியும். ஆனால், சேகரிப்பாளர்களைக்கொண்டு பெறப்படும் முறையில், வினாக்கள் தெளிவாகவும் சுருக்கமாகவும் அமைவது மிக முக்கியமானதாகும். சேகரிப்பாளர்கள் முதலில் தாங்களே வினாக்களை நன்கு தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ளவேண்டும். விடை தருபவர்களிடமிருந்து செய்திகளைக் கூட்டாமலும், குறைக்காமலும், தங்களின் சொந்த விருப்பு வெறுப்புக்கேற்ப மாற்றாமலும் மெய்யான செய்திகளை விடாது சேகரிப்பதில் உண்மையான ஆர்வமுள்ளவர்களாகவும் அவர்கள் விளங்க வேண்டும். வினாப்பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முக்கியக் கருவிகளான அவர்கள் செவ்வனே இயங்கும் நல்லூழியர்களாகச் செயல்புரிய வேண்டும். பத்தாண்டிற்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் மக்கள் கணிப்பில் ஆசிரியர்களையும், மற்றைய அலுவலகக் குறிப்பாளர்களையும், எழுத்தர்களையும் சேகரிப்பாளர்களாக நியமிக்கின்றனர். இவர்கள் ஊதியமின்றி நாட்டின் நலனில் நாட்டங்கொண்டு இத் துறையில் சேவை புரிகின்றனர். நாட்டின், உணவு விளைவுப் புள்ளியினைக் கணக்கர்கள் சேகரிக்கின்றனர். இத்தகைய சேகரிப்பாளர்கள் எத்துணை மெய்யூழியர்களாக விளங்கவேண்டுமென்பதனைச் சொல்ல வேண்டுவதில்லை.

வினாப்பட்டியல் அஞ்சல்வாயிலாக அனுப்பப்படும்போது, அது மிகத் தெளிவாக இருக்கவேண்டும். வினாப்பட்டியல்கள் அனைத்தும் விடையளிக்கப்பட்டுத் திரும்ப அனுப்பப்படும் என்று சொல்லமுடியாது. இம் முறையில் சட்ட ரீதியாக, வினாக்களுக்கு உரிய விடையினைக் கட்டாயமாகப் பெறப்படும் வசதியிருப்பின், இம் முறை சிறந்ததாகும்; இல்லாவிடில் நூறு பேர்களிடமிருந்து செய்திகளை எதிர்பார்த்தால், இருநூறு பேர்களுக்கு வினாக்கள் அனுப்பவேண்டும்.

வினாக்கள், எளிதில் புரிந்துகொள்ளும்வண்ணம் தெளிவாக அமைவதோடு, இருவகைப்பட்ட விடைகளுக்கு ஏதுவான முறையில் அமைதல் கூடாது. இங்கிதமாக விடைபெறும் பாணியில் வினாக்கள் அமைதல்வேண்டும். செய்தியனுப்புபவர்களின் தனிப்பட்ட கருத்துகளையோ, உள்ளத்தையோ, மதநெறிமுறைகளையோ புண்படுத்தும்வண்ணம் அமைதல் கூடாது. 'ஆம்', 'இல்லை' என்பன போன்ற சுருக்கமான பதில்கள், எண் வடிவில் தரப்

படும் பதில்களைப் பெறும்வண்ணம் வினக்கள் அமைதல்வேண்டும். கற்றவரா? செல்வரா? என்பன போன்ற வினக்கள் முழு விளக்கமற்றவை. எனவே, அத்தகைய வினக்களுக்குத் தெளிவான விளக்கங்கள் தரப்படல்வேண்டும்.' இன்ன வகுப்புவரை படித்தவர் கற்றவரென்றும், ஆண்டு வருவாய் இன்ன அளவிற்கு மேற்பட்டால் செல்வர் எனவும் விளக்கம் தரப்படல்வேண்டும். ஓர் ஏக்கர் நன்செய் நிலத்தில் எத்தனை மூட்டை ஆடுதுறை நெல் விளைந்தது எனக் கேட்டால், நாட்டின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் 'மூட்டை' என்பதை வெவ்வேறு அளவில் கொள்வர். எனவே, 60 கிலோ கொண்டது ஒரு மூட்டை என்பது போன்று தெளிவாகச் சொல்லி விடைபெறல்வேண்டும். இங்குக் கூறப்படும் மூல அளவைக்குப் **புள்ளியியல் மூல அளவை** அல்லது **புள்ளியியல் அலகு** என்பது பெயராகும். பெறப்படும் செய்திக்கேற்ப இம் மூல அளவைகள் தெளிவாக விளக்கப்படல்வேண்டும். இனி, சில தருணங்களில் சில கேள்விகளுக்கு நேரடியான பதில்கள் பெறுவது கடினம். தொற்றுநோய் உள்ளவரிடம், தொற்றுநோயால் அவதிப்படுகிறீரா என நேரடியாகக் கேட்டால் சரியான விடையைப் பெறுவது கடினம். அத் தருணங்களில் வேறு ஏற்ற முறையில் கேள்விகளை அமைத்தல்வேண்டும். கனிவாகக் கேட்டு விடைபெற முயலவேண்டும். பெறப்படும் செய்திகளும் விடைகளும் பாகுபாட்டிற்கும் (Classification), பட்டியலமைப்பிற்கும் (Tabulation) உட்படும் தன்மையதாக அமையவேண்டும்; இல்லையெனில், அவை ஆய்விற்கு முற்றிலும் பயன்படாது வீணகும்.

வினப்பட்டியல் அமைக்கும் விதத்தினை மாணவர் நன்கு அறிந்துகொள்ளக் கீழ்க்காணும் இரு வினப்பட்டியல்களைத் தருவோம்.

தமிழகத்தில் வணிகவியல் பட்டதாரிகளின் வேலைவாய்ப்பு நிலையை ஆய்வதற்குப் பயன்படுத்தக்கூடிய வினப்பட்டியல் வருமாறு:

வினப்பட்டியல் 1

1. நிலயத்தின் பெயர் :
2. நிலயத்தின் இருப்பிடம், :
   இருப்பிடம்: நகர்ப்புறமா?
   கிராமப்பகுதியா?
3. நிலயம் கல்வி நிலயமா? உற்பத்திக் கூடமா? வியாபாரத்தளமா? பிற வகை நிலயமா? :

4. நிலையம் ஒருவருக்கு உரிமையானதா? பலருக்கு உரிமையான லிமிடெட் கம்பெனியா? கூட்டுறவு நிலையமா? அரசாங்க அலுவலகமா? வேறுவகை நிலையமா? :

5. நிலையத்தில் மேற்கொள்ளப்படும் பணி :

6. நிலையத்தில் பணியாற்றுபவர்களின் கல்வித்தரம் :

(1) கடைநிலை ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை :

(2) எஸ். எஸ். எல். சி. தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை :

(3) தனித் தொழிற்கல்வி பயின்றோரின் எண்ணிக்கை :

(4) கலை, அறிவியல் பட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கை :

(5) வணிகவியல் பட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கை :

(6) மற்றவர்களின் எண்ணிக்கை :

7. (அ) கடந்த ஐந்து ஆண்டுகளில் இந் நிலையத்தில் வேலைக்கு நியமிக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை :

(ஆ) அவர்களுள் வணிகவியல் பட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கை :

8. தங்கள் நிலையத்தில் எவ்வகைப் பணிகளுக்கு வணிகவியல் பட்டதாரிகளை மட்டும் வேலைக்கு நியமிக்க நீங்கள் விரும்புகிறீர்கள்?

பணித்துறையின் பெயர்கள்					
நியமிக்கப்படவேண்டிய வணிகப் பட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கை					

9. வேலைக்கு நியமிக்கப்பட்டபின், வணிகப் பட்டதாரிகளுக்குக் கற்றுத்தர வேண்டிய பிற பயிற்சிகளின் விவரம் :

10. வணிகப் பட்டதாரிகள் வேலைக்கு நியமிக்கப்பட்டபின், வேலை உயர்வு பெறுவதற்குரிய வாய்ப்புகளின் விவரம் :

11. (அ) கீழ்நிலையில் உள்ள வணிகப் பட்டதாரியின் மாத ஊதியம் :
(ஆ) உயர்நிலையில் உள்ள வணிகப் பட்டதாரியின் மாத ஊதியம் :
(இ) வணிகப் பட்டதாரி பெறும் மீச்சிறு மாத ஊதியம் :

ஒரு தொழிற்சாலையில், ஊழியர்களின் ஊதிய உயர்வால் உற்பத்தியில் ஏற்பட்ட மாறுதலை ஆய்வதற்குரிய வினாப்பட்டியல் வருமாறு:

வினாப்பட்டியல் 2

பாகம் I

(இது தொழிற்சாலையின் ஒவ்வொரு துறையிலும் பயன் படுத்த வேண்டியது.)

1. துறையின் பெயர் :

2. உற்பத்தியாகும் பொருள் விவரம் :

3. (அ) ஊதிய உயர்வுக்குப்பின் உற்பத்தி இயந்திரங்களில் எதுவும் புதிதாகப் புகுத்தப்பட்டதா? அதன் விவரம் :
(ஆ) ஊதிய உயர்வுக்குப்பின் உற்பத்தி முறையில் ஏற்படுத்திய பிற மாறுதல்களின் விவரம் :

4. உற்பத்தியின் அளவு :
(அ) ஊதிய உயர்விற்கு முன் ஒரு மாதத்தில் உற்பத்தியான அளவு :
(ஆ) ஊதிய உயர்விற்குப் பின் ஒரு மாதத்தில் உற்பத்தியான அளவு :

5. ஊதிய உயர்வு நாளன்றும் (1), இன்றும் (2) உள்ள தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை, ஊதிய விவரம்:

வரிசை எண்	தொழிலாளர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை		அடிப்படைச் சம்பள வீதம்		பஞ்சப்படி		வீட்டு வாடகைப் படி வீதம்		இதரப் படி வீதம்		போனஸ் வீதம்		மிகை நேரப் பணி ஊதிய வீதம்		மொத்தச் சம்பளம்		சராசரிச் சம்பளம்	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1																		
2																		
3																		
..																		
..																		
மொத்தம்																		

பாகம் II

(தொழிற்சாலையின் பொது அமைப்பில் பயன்படுத்த வேண்டியது)

1. உற்பத்தி அளவு:

வரிசை எண்	உற்பத்திப் பொருளின் வகை	ஊதிய உயர்விற்கு முன் 30 நாட்களில் உற்பத்தி அளவு	ஊதிய உயர்விற்குப் பின் 30 நாட்களில் உற்பத்தி அளவு	வேறுபாடு
1				
2				
..				
..				
..				
..				
..				
..				
..				
..				
மொத்தம்				

2. மார்க்கெட்டு விலை :

வரிசை எண்	உற்பத்தியான பொருள்களின் வகை	ஊதிய உயர்விற்கு முன் 30 நாட்களில் சராசரி மார்க்கெட்டு விலை	ஊதிய உயர்விற்குப் பின் 30 நாட்களில் சராசரி மார்க்கெட்டு விலை	வேறுபாடு
1				
2				
3				
..				
..				
..				
..				
மொத்தம்				

3. பொது அமைப்பில் ஊதிய நாளன்றும் (1), இன்றும் (2) உள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, ஊதிய விவரம்:

வரிசை எண்	தொழிலாளர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை		அடிப்படைச் சம்பள விதம்		பஞ்சப்படி		வீட்டு வாடகைப் படி விதம்		இதரப் படி விதம்		போனஸ் விதம்		மிகை நேரப் பணி ஊதிய வீதம்		மொத்தச் சம்பளம்		சராசரிச் சம்பளம்	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1																		
2																		
3																		
..																		
..																		
மொத்தம்																		

கிட்டிய மதிப்பின் தரம்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களைக் கிட்டிய மதிப்பில் சில தருணங்களில் சொன்னால் போதுமானதாகும். இரு கல்லூரி மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை ஒப்பிடவேண்டுமெனில், அவற்றினைப் பத்தில் சொன்னால் போதுமானதாகும். A கல்லூரியில் 960 மாணவர்கள், B கல்லூரியில் 850 மாணவர்கள் படிக்கின்றனர் எனக் கூறலாம். கிட்டிய மதிப்பிற்கு இங்கு 10 பயன்படுத்தப்படுகிறது. இரு பல்கலைக்கழகங்களைச் சார்ந்த மாணவர்களை நூறில் கூறலாம். இங்கு 100 கிட்டிய மதிப்பெண்ணாகப் பயன்படுகிறது. இரு நாடுகளின் மக்கள்தொகையினை ஒப்பிட மில்லியனில் கூறுவது போதமானதாகலாம். ஒரு மாவட்டத்தில் விளைந்த நெல்லின் அளவினை நெருங்கிய நூறு டன்களில் கூறினால் போதுமானதாகும். இவ்வாறு புள்ளிகளின் தன்மைக்கேற்ப மதிப்புகளின் தரம் (Degree of Accuracy) மாறுபடுகிறது. புள்ளி விவரங்களைக் கையாளுகையில் இவ்வாறு கொள்ளப்படும் கிட்டிய மதிப்புகள், சில நிலைகளில் உண்மையான சரிமதிப்பிற்குச் சற்று அதிகமாகவும் வேறுநிலைகளில் சற்றுக் குறைவாகவும் இருக்கலாம். முடிவாகக் கூட்டிய நிலையில், உண்மை மதிப்பிற்கும் கிட்டிய மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு மிகமிகக் குறைவாக இருப்பதுதான் சிறந்ததாகும். எனவே, கிட்டிய மதிப்பிற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் தர அளவை (Standard of Approximation), மேற் கூறப்பட்ட வேறுபாடு மிகச் சிறிய அளவில் அமையுமாறு எடுத்துக் கொள்ளப்படவேண்டும் என்பது தெளிவாகும். இங்ஙனம், விடைகளில் பெறப்படும் எண் அளவைகளை ஏற்றதொரு கிட்டிய மதிப்பில் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

பாகுபாடு

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை, ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக்கொள்வதற்கேதுவாக, உற்ற முறையில் பிரித்துப் பாகுபடுத்திக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் எண் குவியலாகத் தோன்றுமேயன்றி, அதிலிருந்து எந்தவித முடிவும் தீர்வும் காண இயலாது. தக்க முறையில் பாகுபடுத்திப் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டினால்தான், அது ஆய்வுக்கு உறுதுணையான வடிவத்தில் அமைவதோடு, பார்ப் போர்க்கும் தெற்றெனப் புரியும்படி அமையும். வேலையின்மை நிலையை ஆயும் நோக்கத்திற்கான புள்ளிவிவரங்களை, வேலையி லுள்ளோர், வேலையற்றவர், போதிய வேலையில்லாதவர், மேலும், அவர்களுள் நகரத்தார், நாட்டுப்புறத்தார், ஆண்கள், பெண்கள் என்ற வகையாகப் பிரித்து அமைத்துக் காட்டினால்தான், அது

தெளிவாகப் புரியும். ஆய்விற்குப் பயன்படும் வண்ணமும், பார்ப்போர்க்குத் தெள்ளிதின் புரியும்வண்ணமும் புள்ளிகளை அல்லது விவரங்களைப் படைப்பது (Presentation of Data) புள்ளியியல் விளக்கும் இரண்டாம் பகுதியாகும்.

இவ்வாறு, பாகுபடுத்தப்பட்ட நிலையில் புள்ளிவிவரக் குவியலானது, வேண்டாதவை புறக்கணிக்கப்பட்டுச் சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் அமைந்திருக்கும். பாகுபடுத்தலுக்கு வழிகாட்டும் வண்ணம் திட்டவட்டமான கணக்கியல் விளக்கங்கள் கூற முடியாது; பொது அறிவும், அனுபவமும், பல்வேறு பட்டியல்களைப் பார்த்துப் பழகிய பயிற்சியும்தாம் பாகுபடுத்தலுக்கான திறனைப் பெற வழியாகும்.

பொதுவாக, பாகுபடுத்தலை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். சமயம், பால் போன்ற தன்மைகளை அடிப்படையாகக்கொண்ட பாகுபடுத்தலைத் தன்மை அளவைப் பாகுபாடு எனவும், வயது, வருவாய் போன்ற எண் அளவையினை அடிப்படையாகக்கொண்ட பாகுபாட்டினை எண் அளவைப் பாகுபாடு எனவும் கொள்ளலாம்.

பட்டியல்

பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை ஏற்றதொரு பட்டியலில் (Tabulation) அமைப்பது அடுத்த கட்டமாகும். சில சமயங்களில் ஒருவழிப்பட்டியலும், வேறு சமயங்களில் இருவழிப்பட்டியல் அல்லது பல்வழிப்பட்டியலும் பயன்படுகின்றன. இவைகளில் தலையாயது **அலைவெண்** (Frequency) **பட்டியல்** ஆகும். அதனைப் பற்றிய விளக்கங்களைப் பின்னர் காண்போம். காலத்தோடு இணைந்த எண்களைக் காலத்தொடர் (Time Series) பட்டியலில் அமைத்தல் மரபாகும்.

பட்டியலில் படுக்கைக் கட்டங்களும், நெடுக்கைக் கட்டங்களும் அமைப்பதுண்டு. ஒவ்வொரு படுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும், ஒவ்வொரு நெடுக்கைக் கட்டங்களின் குழுவிற்கும் உற்ற சுருக்கமான, தெளிவான தலைப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும். தகுந்த முறையில் இடைவெளிவிட்டு, வேண்டியவாறு படுக்கை, நெடுக்கை நேர்க்கோடுகள் வரைந்து, தலையான புள்ளிவிவரங்களுக்குச் சிறப்பிடம் தரவேண்டும். பொது அறிவும் பயிற்சியுமே அழகான பட்டியலை உருவாக்கும் கருவிகளாகும். பல்வேறு பட்டியல்களைப் பார்த்துப் பழகிக்கொள்ளவேண்டும். இங்குச் சில பட்டியல்கள் எடுத்துக்காட்டாகத் தரப்படுகின்றன.

பட்டியல் 1

எஸ். எஸ். எல். ஸி. தேறிய மாணவர்களின் பட்டியல்

ஆண்டு	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
மாணவர்கள்							
மாணவிகள்							
மொத்தம்							

பட்டியல் 2

மூன்று நகர மக்கள்தொகைப் பட்டியல்

	நகரம் A		நகரம் B		நகரம் C	
	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்	ஆண்	பெண்
உழவர்கள்						
தொழிலாளர்கள்						
வணிகர்கள்						
மாணவர்கள்						
பள்ளி செல்லாக் குழந்தைகள்						
மற்றையோர்						
மொத்தம்						

இனி, கீழ்க்காணும் செய்தியினை ஒரு பட்டியல் வடிவத்தில் தருவோம்:

100,000 பேர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் காசநோய் பீடிக்கப்பட்ட தன்மையில் இருந்தனர். அவர்களுள் 5,000 பேர்கள் இன்ஃப்புளுயன்ஸா நோயாலும் பீடிக்கப்பட்டிருந்தனர்; ஆனால், அவர்களுள் 1,000 பேர் மட்டும் பரவாத்தன்மையுள்ள வீடுகளில் இருந்தனர். மாறாக, காசநோயால் பீடிக்கப்பட்டு இன்ஃப்புளுயன்ஸாவிற்குத் தப்பித்தவர்களுள் $\frac{1}{15}$ பேர் பரவும் தன்மையுள்ள வீடுகளில் இருந்தனர். மொத்தத்தில் 21,000 பேர் இன்ஃப்புளுயன்ஸாவாலும் பீடிக்கப்பட்டனர்; 41,000 பேர் ஃப்புளு பரவாத் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருந்தனர். ஆனால், காசநோய்க்குத் தப்பித்து ஃப்புளுவால் பீடிக்கப்பட்டுப் பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் வசித்தவர் 2,000 பேர் மட்டுமேயாவர். (செ.ப.)

பட்டியல் 3

காசநோய், இன்ஃபுளுயன்ஸா நோய்ப்பட்டவர் பட்டியல்

		இன்ஃபுளுயன்ஸா				மொத்தம்
		பீடிக்கப்பட்டவர்		பீடிக்கப்படாதவர்		
		பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவாத் தன்மை உள்ள வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவும் தன்மை வாய்ந்த வீடுகளில் இருப்பவர்	பரவாத் தன்மை உள்ள வீடுகளில் இருப்பவர்	
காச நோய்	பீடிக்கப் பட்டவர்	4,000	1,000	1,000	14,000	20,000
	பீடிக்கப் படாதவர்	2,000	14,000	52,000	12,000	80,000
	மொத்தம்	6,000	15,000	53,000	26,000	100,000

அலைவெண் பரவல்

இதனை அலைவெண் பட்டியல் எனவும் அழைக்கலாம்; பரவல் எனக் கூறுவது புள்ளியியல் மரபாகும். சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஏற்ற அளவுடைய பல்வேறு பிரிவுகளாக அமைத்து, ஒவ்வொரு பிரிவுடன் அது கொண்டுள்ள மொத்த எண்ணிக்கையினையும் சுட்டிக்காட்டும் பட்டியலே **அலைவெண் பரவல்** அல்லது **அலைவுப் பரவல்** (Frequency Distribution) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, 100 கணக்கியல் மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண் விவரங்களைப் 10 பிரிவாகப் பிரிக்கலாம். 0–9, 10–19, 20–29, ...90–100 என்பதான ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் எதிராக அதனுள் அடங்கும் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றோம். 40–49 என்ற மதிப்பெண்களை 35 மாணவர்கள் பெற்றிருந்தால், 40–49 என்ற பிரிவிற்கு எதிராக 35-ஐ எழுதுகின்றோம். 40–49 என்ற பிரிவிற்குரிய **அலைவெண்** அல்லது **நிகழ்வெண்** (Frequency) 35 ஆகும்.

ஒரு பிரிவிற்கும், அதன் முந்திய பிரிவிற்குமுள்ள வேறுபாடு அப் பிரிவுகளின் தூரமாகும். ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய மதிப்பும் (Mid - value) புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும். பிரிவின் தூரங்கள் (Class - intervals) சீராக ஒரேமாதிரியும், சீரற்ற வேறுபட்ட நிலையிலும் அமைவதுண்டு. நடைமுறையில், பின் வருவனபோன்று ஐந்து வகையாகப் பிரிவுகளை இடத்திற்கேற்ப அமைப்பது புள்ளியியல் வழக்கமாகும்.

(1) 0–9, 10–19, 20–29,..........................

(2) 0–10, 10–20, 20–30,......................

(3) 0–10-ற்குக் கீழ், 10–20-ற்குக் கீழ், 20–30-ற்குக் கீழ்,.......................................

(4) 0–, 10–, 20–,..............................

(5) 5, 15, 25,....................................

மூன்றாவது, நான்காவது அமைப்புகள் ஒரே பொருளைத் தருவன; எழுதும் முறைகள்தாம் வேறாகும். இந்த இருவகை

அமைப்புகளிலும், மேல் எல்லையை எந்தத் தசமயிடச் சுத்தமாக எடுக்கவேண்டுமென்பதைச் சொல்வது நல்லது. இவற்றுள், *0–10, 10–20, 20–30,* ....என்பன போன்ற பிரிவுகள்தாம் மெய்ப்பிரிவுகள் (True Classes) என அழைக்கப் படும். மெய்ப்பிரிவுகளில் ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லை, அதன் அடுத்த பிரிவின் கீழ் எல்லையாக அமையும். எத்தகைய பிரிவுகளிலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மேல், கீழ் ஆகிய இரண்டு எல்லைகளின் கூட்டுச் சராசரியே அப் பிரிவின் மைய மதிப்பாகும். எனவே, மேற்கண்ட ஐந்துவகைப் பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் வருமாறு:

(1) *4.5, 14.5, 24.5,* ....

(2) *5, 15, 25,* ....

(3) *4.95, 14.95, 24.95,* ....

(4) *4.95, 14.95, 24.95,* ....

(5) *5, 15, 25,* ....

சில தருணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட பிரிவினை, மெய்ப்பிரிவாக மாற்றி அமைக்கவேண்டியிருக்கும். அப்போது, ஒரு பிரிவின் மையமதிப்பிலிருந்து பிரிவுத் தூரத்தின் சரிபாதியினைக் கழித்தும், கூட்டியும் பெறப்படும் எண்கள், அதற்குரிய மெய்ப்பிரிவின் கீழ், மேல் எல்லைகளாகக் கருதப்படுகின்றன.

அலைவெண் பரவல் அமைத்தல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டங்களை ஓர் அலைவுப் பரவலில் எவ்வாறு அமைப்பது எனக் காண்போம். எடுத்துக்காட்டாக, *100* வணிகர்களின் விற்பனை மதிப்பினை ரூபாயில் கீழ்க்காணும் எண்கள் காட்டுவதாகக் கொள்வோம்:

50	71	133	243	231	91	197	267	194	276
133	124	176	213	314	176	157	195	331	354
124	83	156	254	251	126	214	276	211	294
141	90	155	265	340	130	167	228	351	296
179	163	177	135	276	112	224	177	223	213
153	96	165	272	370	137	165	297	383	313
225	176	215	184	298	133	233	183	231	276
125	105	222	285	259	144	245	245	244	96
121	187	125	192	251	156	151	193	311	299
67	114	231	297	76	147	254	261	254	144

கொடுக்கப்பட்ட மேற்கண்ட எண்களின் மிகச் சிறிய எண் 50; மிகப் பெரிய எண் 383. எனவே, வேறுபாடு 353 ஆகும். எனவே, 25-ஐப் பிரிவின் தூரமாகக்கொண்டு, 14 பிரிவுகளில் இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைக்கலாம்:

அலைவுப் பரவல்

பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
50–74	𝍷𝍷𝍷	3
75–99	𝍸 𝍷	6
100–124	𝍸 𝍷𝍷	7
125–149	𝍸 𝍸 𝍷𝍷	12
150–174	𝍸 𝍸	10
175–199	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14
200–224	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
225–249	𝍸 𝍸	10
250–274	𝍸 𝍸	10
275–299	𝍸 𝍸 𝍷	11
300–324	𝍷𝍷𝍷	3
325–349	𝍷𝍷	2
350–374	𝍷𝍷𝍷	3
375–399	𝍷	1
	மொத்தம்	100

பிரிவுகள் எத்தனை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும், பிரிவின் தூரத்தை எந்த அளவில் கொள்ளவேண்டும் என்பன கொடுக்கப் பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்தினைப் பொறுத்ததாகும். நடைமுறையில், 5, 8, 10, 15, 20 போன்ற அளவு பிரிவின் தூரமாகவும், 8 முதல் 20 வரை பிரிவுகள் கொண்ட பரவலாகவும் அமைக்கலாம். மேற்கண்ட எண் கூட்டத்தில் மிகப் பெரிய எண் 383; மிகச் சிறிய எண் 50 ஆகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் 100. எனவேதான், 25-ஐப் பிரிவின் தூரமாகக்கொண்டு 14 பிரிவுகள் கொண்ட அலைவுப் பரவலாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. முதலில் பிரிவு, அலைவெண் குறிகள், அலைவெண் என மூன்று பிரிவாகப் பட்டியலை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். இரண்டாவது பகுதி யாகிய அலைவெண் குறிகள் (Frequency Marks) என்ற பகுதியின் கீழ் ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் ஒரு நேர்க்கோடிட்டுக் குறியிட வேண்டும். ஐந்தாவது குறியினை ஏற்கெனவே வரையப்பட்டு நான்கு நேர்க்கோட்டுக் குறிகளுக்குக் குறுக்காக வரைந்து, ஐந்து குறிகள் கொண்டது ஒரு குழுவாக அமையுமாறு குறிகள் இடலாம். 卌 என்றவாறு ஒவ்வொரு குறிக்குழுவும் அமைய வேண்டும். பின்பு குறிகளின் எண்ணிக்கையை மூன்றும் பகுதியில் எழுதவேண்டும்.

பயிற்சி

1. முதல்தர, இரண்டாம்தரச் சேகரிப்பு முறைகளைப் பற்றி ஒரு கட்டுரை வரைக. (அ.ப.)

2. (அ) ஒரு வினாப்பட்டியல் சிறப்பானதாக அமைவதற் குரிய முக்கிய தன்மைகள் யாவை? (செ.ப.)

   (ஆ) சென்னை நகரத்தில், தெருப்பிச்சைத் தொழிலைக் கட்டுப்படுத்தவும், ஒழிக்கவும் வேண்டுமென்ற நோக்கத்தைக்கொண்ட ஓர் ஆய்வு மேற்கொள் வதற்குரிய திட்டமொன்றை வரையுமாறு, நீங்கள் கேட்டுக்கொள்ளப்படுகிறீர்கள். ஆய்விற் குரிய என்ன வழிமுறைகளைக் கையாளுவீர்கள் என்பதனை விளக்கி, வேண்டிய புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிப்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் ஏற்ற தொரு வினாப்பட்டியலையும் அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.)

3. ஒரு புள்ளிவிவர ஆய்வினில் பாகுபாடும், பட்டியலும் ஆற்றும் பங்கினையும் சிறப்பினையும் விளக்குக. (செ.ப.)

4. (அ) விளையாட்டுப் பயிற்சி (ஆ) விவாத அரங்கு ஆகியவற்றுக்குத் தனித்தனியாக ஏற்பாடு செய்வதற்கு வகைசெய்யும்வண்ணம் வகுப்பு, பால், வயதுக்குழு என்ற பிரிவுகளில் உங்கள் பல்கலைக் கழக மாணவர்களின் பரவலைத் தெளிவுபடுத்தும் ஒரு வெற்றுப்பட்டியல் வரைந்து காட்டுக. (செ.ப.)

5. ஒரு வகுப்பினைச் சேர்ந்த மக்களின் எண்ணிக்கையை 3 வகை மதம், கற்றவர், கல்லாதவர் என்ற இருவகை, பால்வகை, நகர்ப்புறம், நாட்டுப்புறம் என்ற இருவகைகளில் அமையும் பாகுபாட்டினை விளக்கும் ஒரு பட்டியலை அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.)

6. பல்வகைப்பாடு என்றால் என்ன?

வெவ்வேறு வகையான விற்பனை நிலையங்களில் 3 வகை வானொலிப் பெட்டிகளை 3 மாவட்டங்களில் விற்பனையான புள்ளிவிவரத்தினை 3 கம்பெனிகள் தந்துள்ளன. அதனைத் தெளிவாகக் காட்டுவதற்குரிய பட்டியலை வரைந்து காட்டுக. ஒரு மாவட்டத்தில், ஒரு குறிப்பிட்ட விற்பனை நிலையமூலமாக, ஒருவகை வானொலிப் பெட்டிகள் விற்பனையான எண்ணிக்கையைக் காட்டும் கட்டத்தை அந்தப் பட்டியலில் சுட்டிக் காட்டுக. (செ.ப.)

7. 1964–65, 1965–66, 1966–67, 1967–68ஆம் ஆண்டுகளில் இந்தியாவில் உள்ள முக்கியமான தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திப் பொருள்களின் அளவாலும், மதிப்பாலும் ஏற்பட்ட முன்னேற்றத்தைக் காட்டுமாறும், 1964ஆம் ஆண்டினை அடிப்படையாகக் கொண்டு உற்பத்தியின் சதவீத வளர்ச்சி, குறைவுகளைச் சுட்டிக்காட்டுமாறும் ஒரு பட்டியல் அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.)

8. ஒரு பட்டியலின் பல்வேறு பாகங்கள் யாவை?

(அ) ஏற்றுமதி, இறக்குமதி (ஆ) ஒரு மக்கள் கூட்டத்தின் வாழ்விற்கான தொழில்பற்றிய புள்ளிவிவரம் ஆகியவற்றை விளக்கிக் காட்டும் வெற்றுப்பட்டியல்கள் அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.)

9. வயது, பால், வகுப்பு, குடியிருக்கும் நகர்ப்புறப் பகுதி ஆகிய வகைகளுக்கேற்ப ஒரு கல்லூரி மாணவர்களின் பரவலைக் காட்டத் தகுந்ததொரு வெற்றுப்பட்டியல் அமைத்துக் காட்டுக. (ம.ப.)

10. கடந்த ஏழு பத்துப்பத்தாண்டுகளில் (decades) மதுரை நகர மக்கள்தொகையினைப் பால், வயது ஆகிய இருவகைப் பாகுபாடுகளில் காட்டும் ஒரு வெற்றுப் பட்டியல் அமைத்துக் காட்டுக. (ம.ப.)

11. சென்னை நகரில் சேரிவாழ் மக்களின் சமுதாயப் பொருளாதாரப் புள்ளி ஆய்வினை மேற்கொள்ளத் திட்டமிடப் படுகிறது. அதற்கு எங்ஙனம், திட்டமிட்டுச் செயலாற்றுவீர்கள் என்பதை விளக்கி, அதற்குரிய வினப் பட்டியல் ஒன்றையும் அமைத்துக்காட்டுக. (செ.ப.)

12. சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தின் மாணவர்களின் செலவினை ஆராய மேற்கொள்வதற்கான ஒரு புள்ளிவிவர ஆய்வுத் திட்டத்தினை வினப்பட்டியலோடு விளக்குக. (செ.ப.)

13. கீழ்க்கண்ட பிரச்சினைகளை ஆய மேற்கொள்ளவிருக்கும் புள்ளியியல் ஆய்வுத்திட்டம், புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு முறை, வினப்பட்டியல் முதலியவற்றை விளக்குக.

(1) கல்லூரி மாணவர்களின் பொழுதுபோக்கு

(2) கோவை நகர நெசவாலைத் தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைத்தரம்

(3) தஞ்சாவூர் மாவட்டத்தில் புகையிலை போடுவதால் ஏற்படும் தீமை

(4) சென்னை நகரத்தில் தொழுநோயால் தொல்லைப் படுபவர்

(5) புகைபிடிக்கும் தன்மைக்கும் பிளவைநோய்க்கும் உள்ள உறவு

(6) தமிழ்நாட்டில் இன்ஃபுளுயன்ஸா நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்களின் பிந்திய நிலை

(7) பி. ஸி. ஜி. தடுப்பு மருந்தின் விளைவு

(8) மதுரை நகரத்தில் போக்குவரத்து

(9) நகர நூலகத்தினைப் பயன்படுத்துவோரின் ஆர்வம்

14. ஒரு கல்லூரியில் மொத்த மாணவர்கள் 1248. அதில் $\frac{1}{3}$ பங்கினர் புகுமுக வகுப்பினைச் சார்ந்தவர்; அதில் சரிபாதி கலைப்பகுதியினையும், எஞ்சியவர் அறிவியல் பகுதியினையும் சார்ந்தவர். பட்டப்படிப்பு மாணவர்களுள் 224 பேர் அறிவியல் பகுதியினையும், எஞ்சியவர் கலைப்பகுதியினையும் சார்ந்தவர்கள். கல்லூரியில் மொத்த மாணவியர் 125 பேர். அவர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் பட்டப்படிப்புக் கலைப் பகுதியினைச் சார்ந்தவர்கள், அறிவியல் பட்டப்படிப்புத் துறையில் அதைவிட 5 மாணவியர் அதிகம். 45 மாணவியர் புகுமுக வகுப்புக் கலைத்துறையைச் சார்ந்தவர்.

இதனை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

15. 1951ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் மக்கள்தொகை 357 மில்லியன். இவர்களுள் 249 மில்லியன் உழவுத் தொழிலில் ஈடுபட்டவர்கள். உழவர்களில் 9 மில்லியன் பேர்கள் நகர்ப்புறத்திலும், எஞ்சியவர் நாட்டுப்புறத்திலும் இருந்தனர். உழவரல்லாதவர்களில் பாதிக்குச் சற்று மேலாக நாட்டுப்புறத்தில் வசித்தனர். திட்டவட்டமாகக் கூறினால், அவர்கள் 55 மில்லியன் ஆவர். தங்களைத் தாங்களே போற்றிக்கொள்ளும் 105 மில்லியன் பேர்களில் 71 மில்லியன் பேர்கள் உழவுத் தொழிலில் ஈடுபட்டவர்கள். பிறரைச் சார்ந்து வாழ்பவர்களுள் ஏறத்தாழ 147 மில்லியன் பேர்கள் உழவர்களைச் சார்ந்தும், 67 மில்லியன் பேர்கள் மற்றவர்களைச் சார்ந்தும் இருந்தார்கள்.

இதனை உற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

16. கீழ்க்கண்ட 50 எண்கள் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்:

45, 54, 38, 72, 13, 28, 34, 45, 63, 45, 47, 54
28, 17, 84, 95, 74, 99, 15, 24, 38, 95, 17, 28
83, 53, 28, 46, 66, 59, 65, 95, 34, 23, 9, 45
0, 24, 8, 98, 54, 33, 28, 46, 66, 75, 57, 36
48, 82.

உற்றதோர் அலைவுப்பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

17. ஓர் இடத்தில் ஒரு திங்களில் 55 ஆண்டுகளில் பெய்த மழையின் அளவு (அங்குலத்தில்) வருமாறு:

22, 30, 14, 31, 25, 15, 40, 28, 34, 13, 21, 18
27, 26, 36, 18, 30, 22, 20, 16, 34, 22, 18, 33
17, 25, 34, 35, 26, 34, 18, 40, 25, 16, 24, 22
30, 25, 17, 18, 25, 19, 31, 24, 30, 28, 18, 28
19, 30, 21, 35, 25, 24, 27.

ஏற்றதோர் அலைவுப்பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

18. ஒரு தேர்வினில் மாணவர்கள் வரவுசெலவுக் கணக்குப் பாடத்தினில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. 0–19, 20–39,.................... என்றவாறு பிரிவுகள் அமைத்து ஓர் அலைவுப்பரவலில் இதனை அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.)

140, 168, 185, 150, 135, 168, 155, 118, 165, 153
143, 160, 145, 130, 125, 135, 160, 115, 138, 140
153, 140, 143, 133, 125, 155, 130, 170, 145, 138
133, 140, 108, 130, 95, 143, 90, 118, 135, 163
115, 128, 85, 128, 100, 133, 100, 120, 120, 115
138, 73, 123, 150, 135, 48, 123, 70, 103, 90
105, 90, 125, 123, 85, 75, 130, 130, 108, 85
52, 98, 73, 93, 88, 85, 113, 113, 65, 100
73, 95, 93, 13, 90, 53, 70, 90, 90, 98
88, 83, 40, 75, 25, 68, 43, 78, 65, 50
78, 90, 80, 23, 20, 48, 33, 48, 25, 20
80, 18, 40, 33, 28, 63, 20, 50, 33, 3

19. மேலிருந்தும், கீழிருந்தும் அமைந்த கீழ்க்கண்ட குவிவு (Cumulative) அலைவெண் பிரிவுகளை, சீரான பிரிவு தூரத்தினைக்கொண்ட வழக்கமான சாதாரண அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

(i) மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்	(ii) மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள்
5-ற்குக்கீழ்	10	0-ற்குமேல்	55
10 ,,	22	5 ,,	45
15 ,,	37	10 ,,	33
20 ,,	50	15 ,,	18
25 ,,	55	20 ,,	5

(செ.ப.)

3. விளக்கப் படங்கள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் ஒரே எண்குவியலாகத் தோன்றும் காரணத்தால், அவைகளிலிருந்து அப்படியே எளிதில் ஒன்றும் புலப்படாதாகையால், அவைகளை ஏற்றதொரு முறையில் பாகுபடுத்தி, வகையானதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டவேண்டுமென முன்பு கண்டோம். பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை விளக்கப்படங்களில் அமைத்துக்காட்டுவதும் புள்ளியியல் மரபாகும். சராசரி அறிவுடைய சாதாரண மக்களும் உள்ள நிலையைத் தெள்ளிதின் தெரிந்துகொள்ளவும், புள்ளியியல் நிபுணர்களின் மேலாய்விற்கு உறுதுணையாக அமையும் முறையிலும் பாகுபடுத்தப்பட்ட புள்ளிவிவரங்கள் பலவிதமான விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டப்படுகின்றன. அவைகளில் முக்கியமானவை:

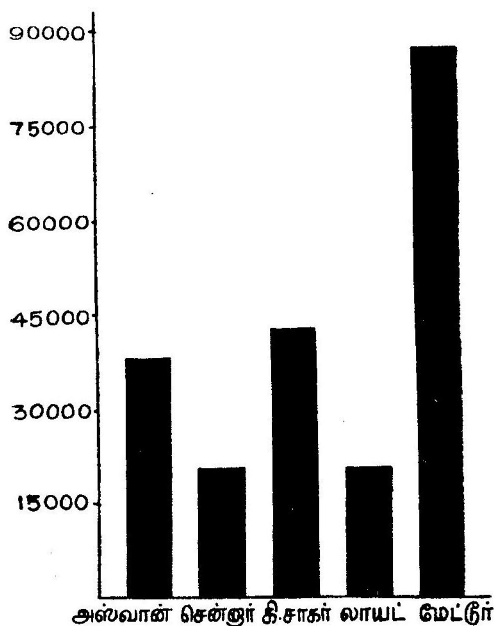
(1) பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar Diagrams),
(2) வட்ட விளக்கப்படங்கள் (Pie Diagrams),
(3) உருவக விளக்கப்படங்கள் (Pictograms),
(4) ஏறு இறங்கு வரிப்படங்கள், Historiographs
(5) நேர்க்கோட்டுப் படங்கள் (Line Diagrams),
(6) பரவல் செவ்வகங்கள் (Histograms),
(7) அலைவெண் பலகோணங்கள் (Frequency Polygons),
(8) அலைவெண் வரைகள் (Frequency Curves),
(9) ஓகைவ் வரைகள் (Ogive Curves),
(10) லாரன்ஸ் வரைகள் (Lorenz Curves),
(11) Z-வரைபடம் (Z-chart) முதலியனவாம்.

பட்டை விளக்கப்படங்கள்

ஒரே நேர்க்கோட்டின்மீது பட்டை பட்டையாகப் பலவகைச் செவ்வகங்கள் வரைந்து, புள்ளிவிவரங்கள் காட்டும் விளக்கங்களையும், வேறுபாடுகளையும், வளரும் தன்மைகளையும் ஒப்புநோக்கித் தெளிவுபடும்வண்ணம் வரையப்படுகின்றன. சில எடுத்துக் காட்டுகள்மூலம் பட்டை விளக்கப்படங்களின் அமைப்பினைக்

கண்டோம். பின்வரும் பட்டியல் ஐந்து அணைக்கட்டுகள் கொள்ளும் தண்ணீர் அளவினைக் (மில்லியன் கன அடியில்) காட்டுகிறது:

அணைக்கட்டுகள்	கொள்ளளவு (மில்லியன் கன அடியில்)
அஸ்வான்	37,600
சென்னூர்	22,560
கிருஷ்ணராஜசாகர்	43,930
லாயட் அணை	24,200
மேட்டூர் அணை	93,500



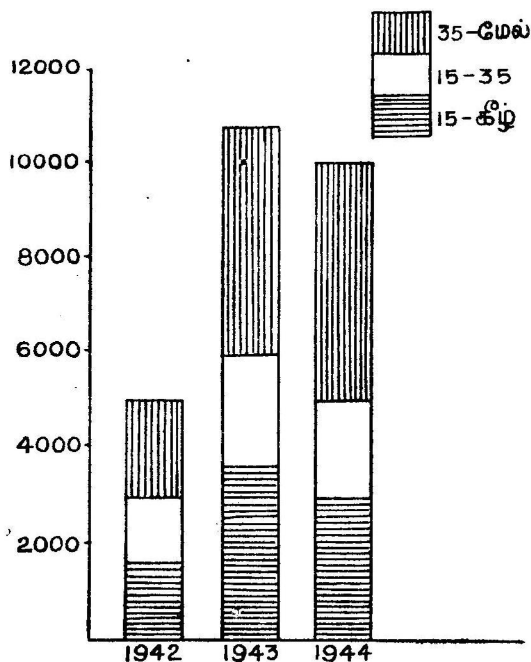
படம் 1.

இத்தகைய படங்களில் ஒரு பட்டைக்கும் அடுத்ததற்கு முள்ள இடைவெளி ஒரே அளவில் அமைதல் வேண்டும். எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே வண்ணத்தில் பட்டைத் தீட்டப்படல் வேண்டும். பட்டைகள் அனைத்தும் சம அகலமுடையனவாக அமைக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு பட்டையும் பலவாறு பிரித்துக் காட்டப்படும் வேறுவகைப் பட்டை விளக்கப்படங்களுமுள. அவைகளைப் **பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படங்கள்** (Component Bar Diagrams) என அழைக்கலாம்.

1942–44ஆம் ஆண்டுகளில் தண்டனை பெற்றுச் சிறை சென்றவர்களின் பட்டியல் வருமாறு:

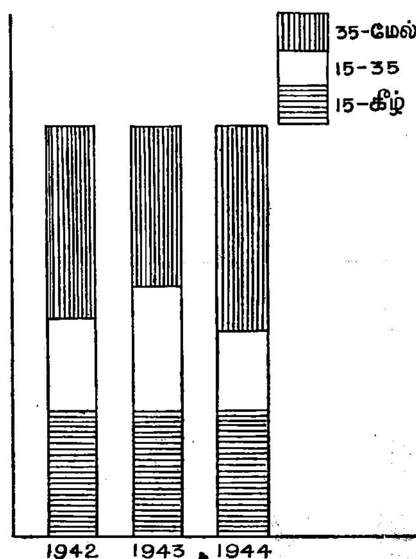
ஆண்டு	15 வயதிற்கு உட்பட்டவர்கள்	15க்குமேல் 35 வயதிற்கு உட்பட்டவர்கள்	35 வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள்
1942	1,455	1,268	2,314
1943	3,065	3,214	4,565
1944	2,602	2,124	4,979

இது கீழ்க்கண்ட பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படங்களில் அமைத்துப் படைக்கப்படுகின்றது.



படம் 2.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்தினையே சதவீதப் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படங்களிலும் அமைக்கலாம். அங்கு ஒவ்வொரு மொத்தத்தையும் நூருகக்கொண்டு, ஒவ்வொரு இணைப் பிரிவினையும் ஏற்ற சதவீத எண்ணில் அமைத்துப் படங்கள் வரைதல்வேண்டும். இங்கு எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைகின்றன.



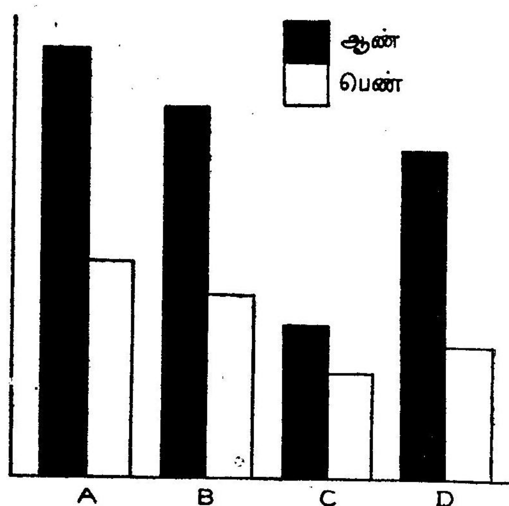
படம் 3.

இனி, **இணைப்பட்டை விளக்கப் படங்கள்** என்ற வகையும் உண்டு. இரு புள்ளிவிவரங்களை ஒப்பிட ஏதுவாகின்ற படங்க ளாகும் அவை. ஆண்-பெண், வரவு-செலவு, ஏற்றுமதி-இறக்குமதி போன்ற செய்திப் புள்ளிவிவரங்களை இணைத்து ஒப்பிட அவை பயன்படுகின்றன.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் நான்கு பல்கலைக்கழகங்களில் ஓர் ஆண்டில் பட்டம் பெற்றவர்களின் புள்ளிவிவரத்தினைத் தருகிறது:

பல்கலைக்கழகம்	ஆண்கள்	பெண்கள்
A	465	220
B	408	186
C	245	85
D	310	102

இதனை விளக்கும் இணைப்பட்டை விளக்கப்படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



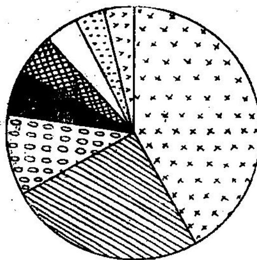
படம் 4.

வட்ட விளக்கப் படங்கள்

சிலவகைப் புள்ளிவிவரங்கள் வட்ட விளக்கப்படங்களில் அளிக்கப்படுகின்றன. ஓர் இரும்பு, மெக்னீஸியத் தாதுப்பொருள் தொழிற்சாலையின் பட்டியல் வருமாறு:

		செலவு இலட்சம் ரூபாய்களில்
1.	சுரங்கச் செலவுகள்	480
2.	இரயில் கட்டணங்கள்	261
3.	துறைமுகக் கட்டணங்கள்	100
4.	மத்திய அரசாங்க வரிகள்	63
5.	இராச்சிய வரிகள்	48
6.	தொழிலாளர் போனஸ் முதலியன	35
7.	இலாபப் பங்கீடுகள்	33
8.	சேமிப்பு நிதி	34
	மொத்தம்	1,054

இதனை, ஒரு வட்டத்தின் பல அங்கங்களாகக் காட்டி விளக்கலாம். வசதியான ஓர் ஆரத்தில் வட்டமொன்று முதலில் வரைந்து கொள்ளவேண்டும். மொத்தம் 1,054-ஐ 360° எனக் கொண்டு ஒவ்வோர் அங்கத்திற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரிக்கவேண்டும். பிரிக்கப்பட்ட வெவ்வேறு வட்டப் பகுதிகளை வெவ்வேறு வண்ணங்களில் தீட்டிக்காட்டவேண்டும். மேற்கண்ட விவரத்திற்குரிய வட்ட விளக்கப்படம் வருமாறு:



படம் 5.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலைகளின் இனங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு நிலையின் இனங்களையும்

ஒவ்வொரு வட்டத்தில் காட்டவேண்டும். இனங்களின் கூடுதல் எண்ணிக்கைகளின் வர்க்கமூல எண்களின் விகிதத்திற்கேற்ப ஆரங்களைப் பட அளவையில் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று நிலை இனங்களின் தனித்தனிக் கூடுதல்கள் 2365, 4144, 6789 என அமைந்தால், ஆரங்களை $\sqrt{2365} : \sqrt{4144} : \sqrt{6789}$ என்ற விகித அளவுகளில் எடுத்துக்கொண்டு வட்டங்கள் வரைதல் வேண்டும்.

உருவக விளக்கப்படங்கள்

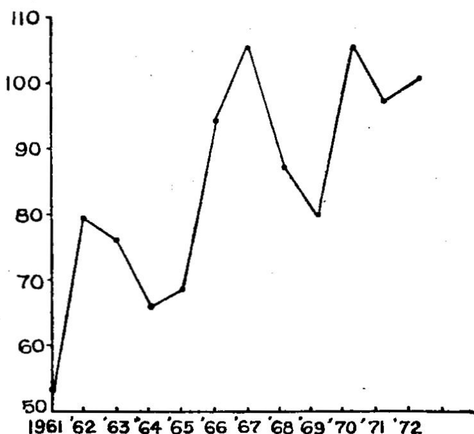
கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெவ்வேறு இனங்களின் மதிப்பிற் கேற்ற விகிதத்தில் உருவகப்படங்கள் வரைவதுண்டு. மனித உருவங்கள், விலங்குருவங்கள், வாகன உருவங்கள் ஆகிய இன்ன பிற உருவங்கள் வரைந்து புள்ளிவிவரங்களை விளக்குவது வழக்க மாகும். புள்ளியியல் விவரத்தினை அறிந்துகொள்ள முடியாத சாதாரண மக்களுக்கு எளிதில் புரியும்வண்ணம் இம் முறை கையாளப்படுகிறது. பல்வேறு பொருட்காட்சி நிலையங்களில் இதனைக் காணலாம். 1931ஆம் ஆண்டு இந்திய மக்கள் கணிப்பு அறிக்கையிலும், மிஞேமாஸினி அவர்கள் எழுதிய 'நவ இந்தியா' என்ற புத்தகத்திலும் மிகமிக அழகான இத்தகைய உருவ விளக்கப்படங்களைக் காணலாம். ஒரு படத்தில் மூன்று வீரர் களையும், பிறிதொன்றில் நான்கு வீரர்களையும் வரைந்து காட்டி, 3084 வீரர்கள் கொண்ட ஒரு நாட்டுப் படையினையும், 4205 வீரர்கள் கொண்ட மற்றுமொரு நாட்டுப் படையினையும் ஒப்பிடலாம். பட்டை விளக்கப்படங்களில் நீளவாக்கிலும், வட்ட விளக்கப்படங்களில் வில்வளைவு வாக்கிலும், உருவக விளக்கப் படங்களில் உருவகநிலையிலும் புள்ளிவிவரங்களை ஒப்பிடுகிறோம்.

ஏறு இறங்கு வரிப்படங்கள்

பல்வேறு காலங்களில் மதிப்பு மாறுபடுகின்ற மாறியின் நிலைகளை நேர்க்கோடுகளால் சேர்த்து **ஏறு இறங்கு வரிப்படங் களில்** (Historiographs) காட்டப்படுகின்றன. காலத்தொடர்கள் (Time Series) இவ்வகைப் படங்களில்தாம் வரைந்து விளக்கப் படுகின்றன. மருத்துவ விடுதிகளில் உடல் வெப்பநிலை, நாடித் துடிப்பு எண்ணிக்கை முதலியவற்றில் ஏற்படும் ஏற்றத்தாழ்வுகளை இத்தகைய வரிப்படங்களில்தாம் காட்டப்படுகின்றன. கீழ்க் கண்ட பட்டியல், 1961 முதல் 1972ஆம் ஆண்டுகளில் ஒரு வங்கி மேற்கொண்டு செலாவணியான பணநிலைகளைக் காட்டு கின்றது. இது ஒரு காலத்தொடர். ஆண்டுகளை x-ஆயத்திலும்,

பணமதிப்புகளை y-ஆயத்திலும் ஏற்ற விகிதத்தில் எடுத்துக் கொண்டு வரிப்படம் வரையப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	செலாவணிப் பணம் (கோடிக்கணக்கான ரூபாயில்)	ஆண்டு	செலாவணிப் பணம் (கோடிக்கணக்கான ரூபாயில்)
1961	53	1967	105
1962	79	1968	87
1963	76	1969	79
1964	66	1970	104
1965	69	1971	97
1966	94	1972	100



படம் 6.

இத்தகைய படங்களிலிருந்து மாறியின் பொதுவான ஏறும் இறங்கும் மதிப்புகளை அறியலாம். இதிலிருந்து காலத்தொடரின் போக்குக்கோட்டினை (Trend Line) வரையலாம். அது தனித் தன்மைக்கோட்டினைக் (Secular Line) காட்டும்.

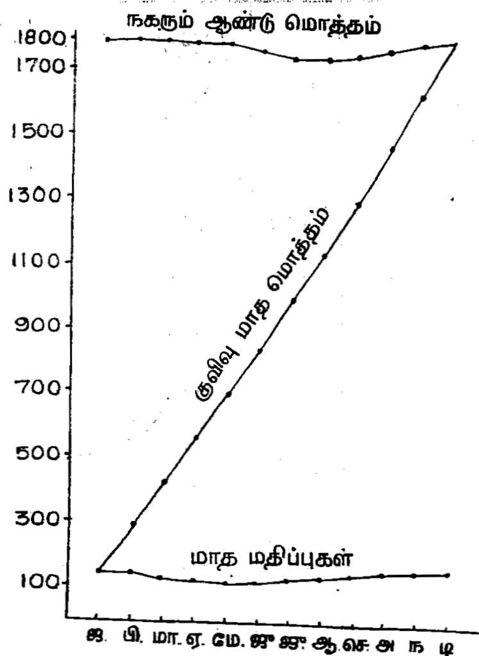
Z-வரிப்படங்கள

வணிக, வியாபாரத் துறைகளிலும், பல்வேறு கம்பெனிகளிலும் Z-வரிப்படங்கள் (Z-Charts) மிகுதியாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. மாதந்தோறும் வியாபாரத்தில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளை அளந்து மதிப்பிட இவைகள் பயன்படுகின்றன. மாதங்களின் இடைவெளிகளில் மையப்புள்ளிகளுக்கு மேல் எதிராக மாதவிற்பனை அல்லது உற்பத்தி அளவுகள் புள்ளிகளாகக் (dots) குறிக்கப்படுகின்றன. பின், இப் புள்ளிகள் நேர்க்கோடு களால் இணைக்கப்படுகின்றன. மேலும், மாதந்தோறும் கூடு கின்ற குவிவுக் கூடுதல்களும் ஒவ்வொரு மாத முடிவிலும் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. இப் புள்ளிகள் நேர்க் கோடுகளால் இணைக்கப்படுகின்றன. பின், ஜனவரி 31, பிப்ரவரி 28 முதலிய மாத இறுதி நாட்களில் நகரும் ஆண்டு மொத்தங் களும் மாத இறுதியில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. இப் புள்ளிகள் நேர்க்கோடுகளால் சேர்க்கப்படுகின்றன. இவ் வாறு மூன்றுவகைச் சேர்க்கைக் கோடுகளும் Z என்ற எழுத்து வடிவில் படத்தினை அமைப்பதைக் காணலாம். இதனால்தான் இவ்வகை வரிப்படங்கள் இப் பெயரைப் பெற்றன. நகரும் ஆண்டு மொத்தம் மேல்முகமாக நோக்கிச் சென்றால், இவ்வாண்டு கடந்த மாதத்தின் விற்பனை, சென்ற ஆண்டு இதே மாதத்தின் விற்பனையைவிட அதிகமெனப் பொருளாகும்; கீழ்நோக்கிச் செல்லுமானால் விற்பனைக் குறைவு எனப் பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

1972, 73ஆம் ஆண்டுகளில் ஒரு வியாபாரத்தில் நிகழ்ந்த விற்பனை மதிப்பைக் (ஆயிரக்கணக்கான ரூபாய்களில்) கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது. அதனை ஒரு Z வரிப்படத்தில் அமைத்துக் காட்டுவோம். இப் படம் 1973ஆம் ஆண்டிற்குரிய Z வரிப்பட மாகும்.

மாதங்கள்	1972	1973	1973-ல் மாதத்துடன் முடிவடைகின்ற குவிவு மொத்தம்	1973-ல் மிகை	1973-ல் மாதத்துடன் முடிவடைகின்ற நகரும் ஆண்டு மொத்தம்
ஜனவரி	143	152	152	—	1800
பிப்ரவரி	147	147	299	0	1800
மார்ச்சு	145	142	441	− 3	1797
ஏப்ரல்	148	138	579	−10	1787
மே	150	133	712	−17	1770
ஜுன்	151	140	852	−11	1759
ஜுலை	154	144	996	−10	1749
ஆகஸ்டு	149	145	1141	− 4	1745
செப்டம்பர்	152	156	1297	+ 4	1749
அக்டோபர்	150	164	1461	+14	1763
நவம்பர்	152	167	1628	+15	1778
டிசம்பர்	155	172	1800	+17	1795
மொத்தம்	1796	1800	—		—



படம் 7.

பாதி இலாகிருத வரிப்படம்

பல்வேறு காலங்களில் வெவ்வேறு சதவீத அளவைகளில் மாறுபடுகின்ற மக்கள்தொகை, உற்பத்தி அளவு, விற்பனை அளவு, வரிமூலம் அரசு வருமானம் முதலிய மாறிகள் **பாதி இலாகிருத வரிப்படங்களில்** (Semi-log graphs) காட்டப்படுகின்றன. $y = ka^x$ என்பது ஆர்கானிக் வளர்ச்சி விதியாகும். வங்கி, வணிகப் பட்டியல்களில் பெரும்பாலான புள்ளிவிவரங்கள் இந்த விதியினைப் பின்பற்றுகின்றன. மேற்கண்ட விதியினைப் பின்பற்றும் புள்ளிவிவரங்கள் y-ன் மதிப்புகள் மிகப் பெருத்த அளவில் வேறுபடும். $y = 10 \times 5^x$ எனக் கொண்டால், $(0, 10)$, $(1, 50)$, $(2, 250)$, $(3, 1250)$, $(4, 6250)$................என்பன இவ் வளைவுகோட்டில் உள்ள புள்ளிகளாகும். சாதாரண வரிப் படத்தாள் இதற்குப் பயன்படாது. இத்தகையப் புள்ளிகளுக்கு, பாதி இலாகிருத வரிப்படத்தாள்கள் (Semi-log papers) பயன் படுத்தப்படுகின்றன. x-ன் மதிப்புகள் அப்படியே x ஆயத்திலும்,

'இலாக் y'-ன் மதிப்புகள் y ஆயத்திலும் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டு அத்தகு தாள்களில் புள்ளிகள் குறிக்கப்படுகின்றன. பின் அப் புள்ளிகள் இணைக்கப்படுகின்றன. இப் படங்களின்மூலம் மாறிகளின் வளர்ச்சிவீத வேகத்தினைக் கண்டு ஒப்பிடமுடியும்.

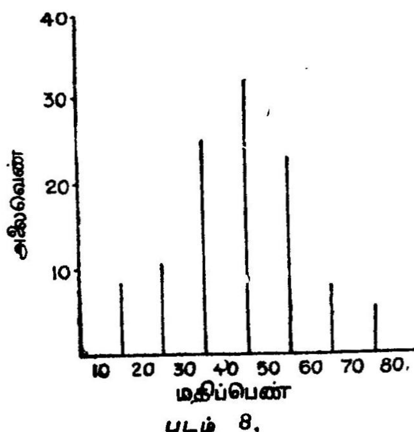
இதுவரை, பட்டியலில் தரப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை அமைக்கும் பல்வேறு விளக்கப்படங்களைப்பற்றிப் பார்த்தோம். அலைவுப்பரவல் அல்லது நிகழ்வெண் பரவலில் தரப்படுகின்ற புள்ளி விவரங்களை, நேர்க்கோட்டுப்படங்கள், பரவல் செவ்வகங்கள், அலைவெண் பலகோணப்படங்கள், அலைவுப்பரவல் வகைகள், கீழ், மேலின ஓகைவ் வரைகள், லாரன்ஸ் வரைகளில் அமைக்கும் விதத்தினை இனிக் காண்போம்.

நேர்க்கோட்டுப்படங்களும் பிறவும்

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 100 மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் காட்டுகின்றது.

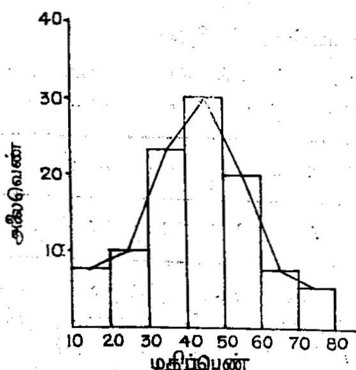
மதிப்பெண்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
அலைவெண்	7	9	22	31	20	6	5

மதிப்பெண்களின் மையமதிப்புகளை x-அச்சில் எடுத்துக் கொண்டு, அதற்குரிய புள்ளியின் வழியாக y அச்சிற்கு இணையாக அலைவெண் மதிப்பிற்கேற்ற விகிதத்தில் நேர்க்கோடுகள் வரைந்தால், பெறப்படுவதுதான் நேர்க்கோட்டுப் படங்களாகும்.



படம் 8.

பரவல் செவ்வகங்கள் வரையும்போது, அலைவுப் பரவலின் மெய்ப்பிரிவுத் தூரத்தின் பட அளவையினை ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் அகலமாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். செவ்வகத்தின் பரப்பு, அலைவெண்ணுக்கேற்ற படஅளவையில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். செவ்வகங்கள் அனைத்தும் படத்தில் காட்டியாங்கு தொடர்ந்து அமைதல்வேண்டும். மெய்ப்பிரிவுகள் சீராக ஒரே தூர அளவையில் அமைந்தால், எல்லாச் செவ்வகங்களும் ஒரே அகலமுடையனவாக அமையும்; பிரிவின் தூரங்கள் சீரற்று மாறுபட்டு அமையின், அதற்கேற்ப செவ்வகங்களின் அகலங்களும் மாறுபடும்.



படம் 9.

ஒரு பிரிவின் மையமதிப்பினை x-தூரமாகவும், அப் பிரிவிற்குரிய அலைவெண்ணை y-தூரமாகவும் கொண்டு, எல்லாப் பிரிவுகளுக்குமுரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, பின் அவற்றினை நேர்க் கோடுகளால் இணைத்தால் பெறப்படுவது **அலைவெண் பலகோணமாகும்** (Frequency Polygon). அப் புள்ளிகளை வளைவுகோடுகளால் இணைக்கப்பெறுவது **அலைவெண் வரை** யாகும் (Frequency Curve). அலைவெண் வரைப்படம் கணிதப் புள்ளியியலில் சிறந்ததொரு பங்குபெறுகிறது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது. அலைவெண் வரைகள் சமச்சீராக அமையும்போது, சமச்சீர் வளைவுகோடுகள் (Normal Curves) என அவற்றை அழைக்கின்றோம்.

ஓகைவ் வரை

குவிவு அலைவெண்வரையே (Cumulative Frequency Curve) **ஓகைவ்** (Ogive) வரையாகும். ஓகைவ் வரைகளில் இருவகை உண்டு. (i) கீழின ஓகைவ் (ii) மேலின ஓகைவ். ஓகைவ் என மட்டும் குறிப்பிட்டால் அது கீழின ஓகைவ் என நாம் கொள்வோம்.

மேற்கண்ட புள்ளியியல் மதிப்பெண் அலைவுப்பரவலுக்குரிய கீழின ஓகைவ் வரைவதற்கு, முதலில் பின்கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்:

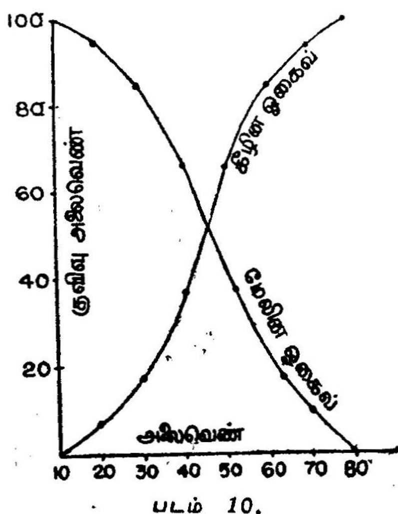
மெய்ப்பிரிவின் மேலெல்லைகள் x	குவிவு அலைவெண்கள் y
20	7
30	16
40	38
50	69
60	89
70	95
80	100

x-மதிப்புகளை x-அச்சிலும், y-மதிப்புகளை y-அச்சிலுமாக உற்ற படஅளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளை வரை தாளில் (graph sheets) குறிக்கவேண்டும். பின் அப் புள்ளிகளை வளைவுகோட்டால் இணைக்கப் பெறப்படுவதுதான் கீழின ஓகைவ் (Less than Ogive) வரையாகும்.

மேலின ஓகைவ் (More than Ogive) வரைய முதலில் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும்:

மெய்ப்பிரிவின் கீழ்எல்லைகள் x	குவிவு அலைவெண்கள் y
10	100
20	93
30	84
40	62
50	31
60	11 ↑
70	5 | +

x-ன் மதிப்புகளை x-அச்சிலும், y-ன் மதிப்புகளை y-அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளை வரைதாளில் குறிக்கவேண்டும். பின் புள்ளிகளை வளைவுகோட்டால் இணைக்கப் பெறப்படுவதுதான் மேலின ஓகைவ் வரையாகும்.



படம் 10.

லாரன்ஸ் வரை

ஏழு ஆண்டுகளில் நகரம் A-யிலுள்ள வங்கிகளின் இலாபம் பின்வருமாறு:

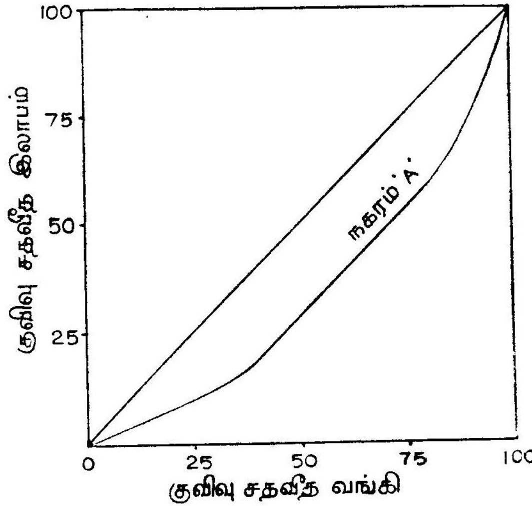
சராசரி இலாபம் (ஆயிரக்கணக்கான ரூபாய்களில்)	10	20	30	40	50	60	75
வங்கிகளின் எண்ணிக்கை:	15	12	8	6	4	3	2

இப் புள்ளிவிவரத்திற்குரிய லாரன்ஸ் வரையினைக் காணக் கீழ்க்கண்டவாறு பட்டியல் அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்:

மொத்த லாபம் (சராசரி இலாபம் × வங்கிகள்) ஆயிரம் ரூபாய்களில்	சதவீத இலாபம்	குவிவு சதவீத இலாபம்	வங்கிக் குவிவு	சதவீத வங்கிக் குவிவு
150	10.7	10.7	15	30
240	17.1	27.8	27	54
240	17.1	44.9	35	70
240	17.1	62.0	41	82
200	14.3	76.3	45	90
180	13.0	89.3	48	96
150	10.7	100	50	100

தற்போது சதவீதக் குவிவு வங்கிகளை ஏற்றதொரு பட அளவில் ஓர் அச்சிலும், சதவீதக்குவிவு இலாபத்தினை ஏற்ற பட

அளவில் பிறிதோர் அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகளைக் குறித்து அவைகளை வளைவுகோட்டால் இணைத்தால் பெறப்படுவதே **லாரன்ஸ் வரை**யாகும்.



படம் 11.

பயிற்சி

1. புள்ளிவிவரத்தினைப் பிரதிபலித்து விளக்கும் பல்வேறு படவிளக்கப் படங்களையும், வரைவிளக்கப் படங்களையும் விளக்குக. அவற்றின் பயன்களையும் எழுதுக. (செ.ப.)

2. கீழ்க்கண்டவை பற்றிக் குறிப்பு வரைக:

   (அ) ஓகைவ்

   (ஆ) செவ்வகப்படங்கள்

   (இ) சமச்சீர் வளைவுகோடு

   (ஈ) Z-வரிப்படங்கள்

   (உ) உருவகப்படங்கள்

   (ஊ) லாரன்ஸ் வரை. (செ.ப.)

3. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரத்தினை ஏற்றதொரு விளக்கப் படத்தில் அமைத்துக்காட்டுக:

*1961*ஆம் ஆண்டில், டில்லி, பம்பாய், லக்னோ, நாக்பூர், சென்னை, கல்கத்தா ஆகிய நகரங்களில் *1,000* ஆண்டுகளுக்கு நிகராக உள்ள பெண்களின் எண்ணிக்கை:

772; 597; 786; 10,006; 914; 571 (செ.ப.)

4. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் *1938—39*ஆம் ஆண்டில் பல்வேறு நாடுகளில் விளைந்த அரிசியின் அளவினைக் (பவுண்டில்) காட்டுகிறது. அதற்கேற்ற விளக்கப்படம் ஒன்று வரைக.

நாடுகள்	**ஓர் ஏக்கரில் விளைவு** (பவுண்டில்)
எகிப்து	*2,153*
இந்தியா	*728*
இத்தாலி	*[illegible],903*
ஜப்பான்	*2,276*
சயாம்	*943*
அமெரிக்கா	*1,449*

5. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரம் பல்வேறு நாடுகள் வாரந்தோறும் செலவு செய்யும் பானங்களின் அளவினைத் (டன்னில்) தருகிறது. அதனைப் பல்அங்கப்பட்டை விளக்கப்படங்களிலும், சதவீதப் பல்அங்கப்பட்டை விளக்கப்படங்களிலும் அமைத்துக் காட்டுக:

நாடுகள்	**தேயிலை**	**கொகோ**	**காப்பி**
A	*3,260*	*1,850*	*900*
B	*4,050*	*2,060*	*1,200*
C	*2,480*	*1,600*	*1,010*
D	*2,200*	*980*	*850*

6. இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட நிதிநிலையினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது:

		ரூபாய்கள் (கோடியில்)
1.	உழவு, சமுதாய வளர்ச்சி	565
2.	பாசனப்பகுதி, வெள்ளக் கட்டுப்பாடு	458
3.	மின்சக்தி	440
4.	தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	891
5.	போக்குவரத்து, செய்தித்துறை	1,384
6.	சமூக சேவை	946
7.	பிற இனங்கள்	116

இதனை ஒரு வட்ட விளக்கப்படத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக: (செ.ப.)

7. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரத்தினை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக:

இனங்கள்	செலவு (ரூபாயில்)
உணவு	87
உடை	24
பொழுதுபோக்கு	11
கல்வி	13
வாடகை	25
பிற இனங்கள்	20
மொத்தம்	180

(செ.ப.)

8. ஒரு தொழிற்கூடத்தில் பணியாளர்களின் பரவலைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட வயதிற்குமேல் பணியாற்றும் நபர்களைச் சுட்டிக்காட்டும் வண்ணம் ஒரு வரிப்படம் வரைக. அந்த வரிப்படம்மூலம், 60 வயதிற்கு மேற்பட்ட பணியாளர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

வயது	12–14	14–16	16–18	18–20	20–25	35–45	45–55	55–65	65–70	70–75	மொத்தம்
பணியாற்றுபவர்கள்	9	106	145	148	320	546	464	286	81	49	2154

(செ.ப.)

9. கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரத்திற்கு ஒரு செவ்வகப்படம் வரைக:

ஒரு பண்ணையில் உள்ள ஆடுமாடுகளின் எண்ணிக்கை	1–25	26–50	51–75	76-ற்குமேல்
அதற்குரிய பணியாட்களின் எண்ணிக்கை	221	343	175	83

(செ.ப.)

10. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு ஒரு செவ்வகப்படம் வரைக:

பிரிவு	89–95	95–105	105–115	115–125	125–135	135–145	145–155
அலைவெண்	20	26	49	64	54	28	14

(செ.ப.)

11. பின்கண்டவை மாணவர்கள் புள்ளியியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்:

48, 31, 70, 28, 64, 49, 44, 58, 40, 67, 60, 9, 56, 88, 42, 45, 55, 40, 22
34, 45, 52, 16, 43, 60, 79, 69, 58, 54, 48, 51, 42, 48, 39, 45, 34, 32, 38
29, 80, 67, 63, 84, 59, 52, 96, 54, 91, 87, 32.

இதனை ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்து, பின் ஏற்றதொரு பரவல் செவ்வகத்தில் அமைத்துக் காட்டுக.

12. அலைவெண் புள்ளிவிவரத்தினைப் படைக்கும் வெவ்வேறு விளக்கப்படங்கள் யாவை? கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குரிய விளக்கப்படங்களை வரைக:

உயரம் (அங்குலத்தில்)	அலைவெண்
59—61	3
61—63	13
63—65	54
65—67	111
67—69	128
69—71	85
71—73	30
73—75	6
75—77	1

(செ.ப.)

13. உற்பத்தியான பொருள்களின் நீள அளவை (மில்லி மீட்டரில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

நீளமைய மதிப்புகள்:	604	606	608	610	612	614
அலைவெண் :	3	16	35	33	11	2

இதற்குரிய ஓகைவ் வரைக. (செ.ப.)

14. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு ஒரு குவிவு அலைவெண் வரைக. 30–32 வயதிற்குழுவில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பீடு செய்க:

வயது	20-25	25.30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
நபர்கள்	50	70	100	180	150	120	70	59

(செ.ப.)

15. இரு வகுப்பு மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப் பெண்கள் வருமாறு:

சராசரி மதிப்பெண்	வகுப்பு A-யில் மாணவர்கள்	வகுப்பு B-யில் மாணவர்கள்
35	20	25
40	22	20
45	16	10
50	15	12
60	8	5
70	2	1

இதனை ஏற்ற லாரன்ஸ் வரையில் அமைத்துக் காட்டுக.

4. சராசரிகள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரக் குழு எண் சிதறலாக அமைந்து கிடக்கும். அதிலிருந்து அப்படியே அப் புள்ளிவிவரத்தினைப் பற்றிய தன்மைகளைப் புரிந்துகொள்வது இயலாத காரியம். அப் புள்ளிவிவரத்தின் தன்மைகளையும் சிறப்பியல்புகளையும் காண வேண்டின் அதற்குரிய பல்வேறு புள்ளியியல் பண்பளவைகளைக் (Parameters) காணவேண்டும். அத்தகைய ஒவ்வொரு சுட்டுறுப்பும் ஒவ்வொருவகைத் தன்மையினை அல்லது பண்பினை எடுத்துக் காட்டத்தக்கது. புள்ளிவிவரம் எத்தகைய மையத்தினைச் சுற்றிச் சுழன்று நிற்கிறது என அறிந்தால் அப் புள்ளிவிவரத்தின் ஒரு விதத் தன்மையினை அறியவும் ஆயவும் ஏதுவாகிறது. ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் அவ் வகுப்பின் தரத்தினை எடுத்துக்காட்டும். ஒரு வணிகரின் உச்ச விற்பனை அவர் எவ்வளவு பொருள்கள் சேகரித்து வைத்துக்கொள்ள வேண்டுமென்பதனை எடுத்துக்காட்டும். ஒரே வயதுடையவர் களின் இடைநிலை அளவுடைய அங்கி, அங்கிகளை மொத்தமாகத் தைத்து விற்பனை செய்வோருக்குப் பயனுள்ளதாகவிருக்கும். இது போன்று பின்பு நாம் காணவிருக்கின்ற பல்வேறு சுட்டுறுப்புகள் புள்ளிவிவரத்தின் பல்வேறு தன்மைகளை எடுத்துக்காட்டப் பயன்படுகின்றன. அவை பலருக்குப் பலவிதமாகப் பயன்படும் தன்மையதாக அமையும். இங்குப் புள்ளிவிவரத்தின் மையப் போக்கினைக் காணப் பயன்படுகின்ற பண்பளவைகளை ஆய்வோம். அவ்வளவைகளுக்குச் **சராசரிகள்** (Averages) எனப் பெயராகும். ஒரு பரவலில் அடங்கியுள்ள எல்லாவித அம்சங்களின் அளவுகளைப் பிரதிபலிக்கின்ற ஓர் அளவே அப் பரவலின் சராசரி எனக் கூறலாம். அந்த ஒரு பிரதிநிதி அளவு அப் பரவலின் எல்லா அம்சங்களின் சுருக்களவாக நிற்கின்றதெனலாம். இத்தகைய அளவைகளாகிய சராசரிகள் பல உண்டு. வெவ்வேறு தருணங் களில் வெவ்வேறு சராசரிகள் பயன்படுகின்றன. அவை:

(1) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean);

(2) இடைநிலை (Median);

(3) முகடு (Mode);

(4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean);

(5) ஹார்மானிக் அல்லது இசைச் சராசரி (Harmonic Mean) என்பனவாம்.

இத்தகைய சராசரிகளை ஓர் எண் கூட்டத்திற்கும், ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கும் எவ்வாறு கணக்கிடுவதென்பதை முதலில் அறிந்து கொள்ளவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகள் என்க. அவைகளின் கூடுதல் Σx_r ஆகும். $\frac{\Sigma x_r}{n}$ என்பதைத்தான் அவ்வெண் கூட்டத்தின் கூட்டுச் சராசரி எனச் சொல்கிறோம்; இதனை $\bar{x}$ எனக் குறிக்கின்றோம். எனவே,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$$

$$\therefore \quad n\bar{x} = \Sigma x_r$$

தற்போது, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்பன ஓா அலைவுப் பரவலில், n மைய மதிப்புகளாகட்டும்! $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ என்பன அப் பரவலில் முறையே அம் மதிப்புகளின் அலைவெண்கள் என்க! எனில், $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots\ldots + f_n x_n = \Sigma f_r x_r$ என்பதுதான் அப் பரவலின் கூடுதல் மதிப்பாகும். அதில் அடங்கியுள்ள அம்சங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = N$ ஆகும். அப் பரவலின் மொத்த அலைவெண் N. எனவே, ஓர் அலைவுப் பரவலில்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N}$$

$$\therefore \quad N\bar{x} = \Sigma f_r x_r$$

ஓர் அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட சூத்திரம் காணல்

மைய மதிப்புகள்	$x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_n$
அலைவெண்	$f_1\ f_2\ f_3 \ldots\ldots f_n$

$x_r = A + d_r$ என்பதில் A என்பது எடுத்துக் கொண்ட ஏதாவதொரு மதிப்பெண்க.

எனவே,

$$d_r = x_r - A$$

தற்போது, $$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N}$$

$$= \frac{\Sigma f_r (A + d_r)}{N}$$

$$= A \frac{\Sigma f_r}{N} + \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

$$= A + \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

d_r-ஐ அப்படியே எடுத்துக்கொள்ளாமல், பிரிவின் தூரமாகிய C-ன் மடங்காகிய எண்ணை எடுத்துக்கொண்டு, இறுதியில் C-ஆல் பெருக்கிக்கொள்ளலாம். எனில்,

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma f_r d_r}{N} \right) C.$$

மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய மைய மதிப்பினை A-ஆக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

பத்து பெண்களின் எடை (பவுண்டில்) வருமாறு: *85, 82, 98, 105, 112, 95, 98, 113, 120, 115* என்றால் கூட்டுச் சராசரி யாது?

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n} = \frac{1023}{10} = 102.3 \text{ பவு.}$$

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக:

எடை (பவுண்டில்)	75-79	80-	85-	90-	95-	100-	105-	110-	115-119
அலைவெண்	5	15	25	41	50	43	31	14	6

x	f_r	d_r	$f_r\ d_r$
75–79	5	–4	–20
80–	15	–3	–45
85–	25	–2	–50
90–	41	–1	–41
95–	50	0	0
100–	43	1	43
105–	31	2	62
110–	14	3	42
115–119	6	4	24
மொத்தம்	230		15

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma f_r\ x_r}{N}\right)C$$

$$= 97 + \left(\frac{15}{230}\right) \times 5$$

$$= 97.33 \text{ பவு.}$$

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள்

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

நிறுவுதல்:

முதல் வகை:

வெற்று எண் கூட்டங்களை முதலில் கவனிப்போம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\ x_r}{n}.$$

தனி அம்சம் x_r என்க. கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$. $\bar{x}$-லிருந்து x_r-ன் விலக்கம் d_r என்க.

எனில், விலக்கம் $d_r = x_r - \bar{x}$

$$\therefore \quad \Sigma\ d_r = \Sigma\ (x_r - \bar{x})$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma\ d_r}{n} = \frac{\Sigma\ x_r}{n} - \frac{\Sigma\ \bar{x}}{n}$$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$

$$= o$$

$$\therefore \quad \Sigma\ d_r = o.$$

இரண்டாம் வகை:

அலைவுப்பரவலைத் தற்போது கவனிப்போம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N}$$

இங்கு, விலக்கம் $f_r d_r = f_r (x_r - \bar{x})$

$$\therefore \Sigma f_r d_r = \Sigma f_r x_r - \bar{x} \Sigma f_r$$

$$\therefore \frac{\Sigma f_r d_r}{N} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N} - \bar{x} \frac{\Sigma f_r}{N}$$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$

$$= o$$

$$\therefore \Sigma f_r d_r = o.$$

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மீச்சிறியதாகும்.

நிறுவுதல்:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகள் என்க. x என்ற ஓர் எண்ணிலிருந்து விலக்கம் காணுவதாகக்கொள்வோம்.

$f(x)$ என்பது x-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் என்க.

$$\therefore f(x) = \Sigma (x - x_r)^2$$

$$= \Sigma x^2 - 2x \Sigma x x_r + \Sigma x_r^2$$

$$= n x^2 - 2x \Sigma x_r + \Sigma x_r^2$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = 2nx - 2 \Sigma x_r.$$

$f(n)$ மீச்சிறியதானல்,

$$\frac{df}{dx} = o$$

(அ-து) $n x - \Sigma x_r = o$

$$\therefore x = \frac{\Sigma x_r}{n} = \bar{x}$$

எனவே, $f(x)$ மிகச் சிறியதாக இருக்கும்போது $x = \bar{x}$ ஆகும். எனவே, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மீச்சிறிய மதிப்பாகும்.

(3) n_1 அம்சங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$; n_2 அம்சங்கள் கொண்ட பிறிதொரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$. இவ்விரண்டும் இணைந்த புதிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

நிறுவுதல்:

முதல் குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_1 \bar{x}_1$
இரண்டாம் குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_2 \bar{x}_2$
இணைந்த குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2$
புதுக் குழுவின் மொத்த அலைவெண் $= n_1 + n_2$

$\bar{x}$ என்பது புதுக் குழுவின் கூட்டுச் சராசரி **என்க.**

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

குறிப்பு:

இத்தகைய k குழுவினை எடுத்துக்கொண்டால்

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \ldots\ldots + n_k \bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k.}$$

இடைநிலை

இரண்டாவது மையப்போக்கின் அளவையாகப் பயன்படுவது **இடைநிலை**யாகும். இறங்கு அல்லது ஏறு வரிசையில் அமைந்த மதிப்புகளின் நடுவே அமைந்த மதிப்பே இடைநிலையாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஏனெனில், இடைநிலையானது சரிபாதி மாறிமதிப்புகளுக்குப் பெரியதாகவும், பிறவற்றுக்குச் சிறியதாகவும் அமைந்த மாறிமதிப்பேயாகும்.

எண் கூட்டங்களின் இடைநிலை

எண் கூட்டங்களை முதலில் ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதிக்கொள்வோம். அவ் வரிசையில், ஒற்றைப் படை எண்ணிக்கை எண்களிருப்பின் நடுமதிப்பு ஒன்றேயாகும்; அங்கு அதுவே இடைநிலையாகும். அவ் வரிசையில் எண்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாக அமைந்தால், நடு இரு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியை இடைநிலையாகக் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

18, 24, 32, 19, 45, 36, 25, 45, 54 ஆகிய எண்களின் இடைநிலையினைக் காண்க.

ஏறு வரிசையில் அமைப்பின்,

18, 19, 24, 25, 32, 36, 45, 45, 54.

நடுவெண் = 32

∴ இடைநிலை = 32.

எடுத்துக்காட்டு

84, 78, 94, 65, 87, 75, 90, 68, 73, 66 ஆகிய எண்களின் இடைநிலையினைக் காண்க.

ஏறு வரிசையில் அமைத்தால்,

65, 66, 68, 73, 75, 78, 84, 87, 90, 94

நடுவெண்கள் = 75, 78

$$\therefore \text{இடைநிலை} = \frac{75+78}{2} = 76.5$$

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை

ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலை காண, மேற்கண்ட முறை பொருந்தாது. அலைவுப் பரவலில், அதன் அலைவுப் பரவல் வரை அடைக்கும் பரப்பானது அதன் மொத்த அலைவெண்ணைக் குறிக்கிறதென்பது எளிதில் புலனாகும். எனவே, y-அச்சிற்கு இணையான எந்தவொரு நேர்க்கோடு, அப் பரப்பினை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றதோ, அக் கோடு x-அச்சில் வெட்டும் மதிப்பையே இடைநிலையாகக் கொள்ளவேண்டும். எனவே, $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பைக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் (Cumulative frequency) கொண்ட அம்சத்தின் மதிப்பே அப் பரவலின் இடைநிலையாகும். கூட்டுச் சராசரிக்குத் தெளிவான விளக்கம் காணமுடியும்; ஆனால், இடைநிலைக்குத் தெளிவானதொரு விளக்கம் கூறமுடியாது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

அலைவுப் பரவலின் இடைநிலை காண சூத்திரம் காணுதல்

கூட்டுச் சராசரிக்குச் சூத்திரம் காணுகையில், ஓர் அலை வெண்ணுக்குரிய மதிப்பாக அதனது பிரிவின் மையப் புள்ளியைக் கொள்ளுகின்றோம். இடைநிலையைக் காணுகையில் இவ்வனுமானம் பொருந்தாது. இங்கு ஒரு பிரிவுக்குரிய அலைவெண் அப் பிரிவினில் சமமாகப் பரவியிருப்பதாகக் கருதுகிறோம். மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய பிரிவினில், அம்சங்கள் வலப்புறமாக அதிகம் சரிகின்றன; அதற்கடுத்த பிரிவினில் அவை இடப்புறமாக அதிகம் சரிகின்றன என்பது உண்மையெனினும், மிகத் திட்டவட்டமாகக் கணக்கியல் இடைநிலைச் சூத்திரம் காணமுடியாதநிலையில், மேற்கண்ட அனுமானத்தைக் கையாள்கிறோம்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில், $\frac{N}{2}$ மதிப்புள்ள குவிவு அலைவெண் எந்தப் பிரிவில் விழுகின்றதென்பதைக் காண்பது எளிது. அப் பிரிவினை, இடைநிலைப் பிரிவாகக் கொள்ளல்வேண்டும். சூத்திரம் காண அப் பிரிவினை மெய்ப்பிரிவாக மாற்றி அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். இடைநிலைப் பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க. இடைநிலை மெய்ப்பிரிவின் கீழ்எல்லை l என்க; இடைநிலைப் பிரிவிற்குரிய அலைவெண் f என்க; பிரிவின் தூரம் c என்க.

கீழ்க்கண்ட படத்தினை நோக்குக:

படம் 12.

PQR, இடைநிலைப் பிரிவு *AD*-யின் ஓகைவ் ஆகும்.

$$\frac{PS}{PT} = \frac{QS}{RT}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{PS}{C} = \frac{N/_2 - m}{f}$$

$$\therefore \quad PS = \frac{(N/_2 - m)\, C}{f}$$

$$\text{இடைநிலை } OB = OA + AB$$

$$= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) C}{f}$$

$$\therefore \text{ இடைநிலை } = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right) C}{f}$$

குறிப்பு:

ஓகைவ் வரையில் $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பிற்கான *y*-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து *x*-அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர்க் கோடானது, வரையினை வெட்டும் புள்ளியின் *x*-ஆயத்தூரமே இடைநிலையாகுமென்பது எளிதில் புலனாகும். மேலும், கீழின, மேலின ஓகைவ் வரைகள் வெட்டும் புள்ளியின் *x*-ஆயத் தொலைவே இடைநிலையைக் காட்டுமென்பதும் எளிதில் புலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

230 பேர்களின் எடை அலைவுப் பரவலின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

எடை	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
75–79	5	5
80–	15	20
85–	25	45
90–	41	86
95–	50	136 → $\frac{N}{2}$
100–	43	179
105–	31	210
110–	14	224
115–119	6	230

இடைநிலை மெய்ப் பிரிவு $= 94.5 - 99.5$

$\frac{N}{2} = 115; \quad l = 94.5; \quad m = 86; \quad f = 50; \quad C = 5$

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)C}{f}$$

$$= 94.5 + \frac{(115 - 86)\,5}{50}$$

$$= 94.5 + 2.9$$

$$= 97.4$$

இடைநிலையின் சிறப்பியல்பு

ஒரு வெற்றெண் கூட்டத்தில், இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை (Absolute) விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும். (இது அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது.)

நிறுவுதல் :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் கூட்டங்களை ஏறு வரிசையில் எடுத்துக்கொள்வோம். x என்பது எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஏதாவதொரு மூலவெண்ணாகட்டும். இவற்றுள் $a, b, c, \ldots$ என்பன x-ஐவிடச் சிறியதாகவுள்ள n_1 எண்களாகட்டும்; $a_1, b_1, c_1 \ldots$ என்பன x-ஐவிடப் பெரியதாகவுள்ள n_2 எண்களாகட்டும்.

$$f(x) = \sum_{n_1} (x - a) + \sum_{n_2} (a_1 - x)$$

இது ஒரு தொடர்சார்பு (Continuous function).

எனவே,

$$\frac{df}{dx} = (1 + 1 + \ldots\ldots\ldots n_1 \text{ உறுப்புகள்}) - (1 + 1 + \ldots\ldots\ldots n_2 \text{ உறுப்புகள்.})$$

$$= n_1 - n_2$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = - \; (n_1 \angle n_2 \text{ எனில்})$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad (n_1 = n_2)$$

$$\frac{df}{dx} = + \; (n_1 7 n_2 \text{ எனில்})$$

$n_1 = n_2$ எனில் x என்பதுதான் இடைநிலையாகும். எனவே, இடைநிலைக்கு இடப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் இறங்குகின்ற சார்பாகவும், வலப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ ஆனது ஓர் ஏறுகின்ற சார்பாகவும் அமைகின்றது. இடைநிலை $\frac{df}{dx}=0$ ஆக அமைகிறது. எனவே, இடைநிலையில் $f(x)$ மிகச் சிறியதாக அமைகிறது.

எனவே, இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண் அளவை விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

முகடு

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களை நோக்குவோம். எடுத்துக்காட்டாக, 42 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமானால், 42-ஐ அம் மதிப்பெண்களின் முகடாகக் கொள்கிறோம். எந்தவொரு மாறியின் மதிப்பு மிக அதிகமான தடவைகளில் நிகழ்கின்றதோ, அம் மாறியின் மதிப்பு, அம் மாறி மதிப்புகளின் **முகடாகக்** கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, முகடானது அலைவுப் பரவலோடு இணைந்து விளங்கப்படுகிறது என்பது நோக்கத் தக்கது. வெற்று எண் கூட்டத்திற்கு முகடு கிடையாது. அவைகளை அலைவுப் பரவலில் அமைத்துத்தான் முகடு காணவேண்டும்.

மிகப் பெரிய அலைவெண்ணைப் பெற்ற பிரிவிற்குப் பெயர் முகட்டுப் பிரிவாகும். முகட்டுப் பிரிவின் மைய மதிப்பை முகடாகக் கொள்வது, முதல்தரக் கிட்டிய மதிப்பான முகடாம்; இரண்டாம் தரக் கிட்டிய மதிப்புப்படி முகடு காணவேண்டுமெனில், முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் முந்திய, உடன் பிந்திய பிரிவுகளைக் கருதவேண்டும். f_1, f_2 என்பன முறையே அப் பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் என்க. எனில், முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லையில் f_1 எடை அழுத்துவதாகவும், மேல் எல்லையில் f_2 எடை அழுத்துவதாகவும் கொண்டு, அவைகளின் ஈர்ப்புப் புள்ளியினைக் கண்டு அதன் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{c f_2}{f_1+f_2}$$

இங்கு, l—முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை
c—பிரிவின் தூரம்

(கூட்டுச் சராசரி — முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை) என்ற சூத்திரம் பல பயிற்சிகளின் முடிவில் உண்மையெனக்

கண்டதாகும். கணக்கியல் வாயிலாக நிறுவப்படாவிடினும், இதனைப் பயன்படுத்தினால், பொருட்படுத்துமளவிற்குப் பிழை நேராது. ஓகைவ் வரையில் வளைவு மாற்றுப்புள்ளி அல்லது திருகுப்புள்ளியின் (Point of Inflexion) x-தூரமே முகடென்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு

230 பேர்கள் கொண்ட எடை பரவலுக்குரிய முகடு காண்க.

முகட்டுப் பிரிவு = 95–99

$l = 94.5;\ f_1 = 41;\ f_2 = 43;\ c = 5$

$$\text{முகடு} = l + \frac{c\ f_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 94.5 + \frac{215}{84}$$

$$= 94.5 + 2.56 = 97.06$$

சிக்கல் நிலை

மிக உயர்ந்த அலைவெண்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு முகடு கணிக்க முற்படும்போது, சில பரவல்களில் முகட்டுப் பிரிவினைத் தீர்மானிப்பது சிக்கலாயிருக்கும். அங்கெல்லாம் குழு அமைப்பு (grouping method) முறையினைக் கையாண்டு முகட்டுப் பிரிவினைத் தீர்மானிக்கவேண்டும். அங்ஙனம் கண்ட முகட்டு மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க; அப் பிரிவில் கண்ட அலைவெண் f என்க; அப் பிரிவிற்கு முந்திய, பிந்திய அலைவெண்கள் முறையே f_1, f_2 என்க; c என்பது பிரிவின் தூரம்; Z என்பது முகடு. எனில்,

$$Z = l + \frac{(f - f_1)\ c}{2 f - f_1 - f_2}$$

என்ற சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்தி முகடு காணுதல்வேண்டும். இச் சூத்திரம் அலைவெண்கள் வேறுபாட்டைக் கருத்திற்கொண்டு வழிந்தெடுக்கப்பட்டதாகும். இந் நிலைகளில், அண்டை அலைவெண்களின் திறன்களை (Weights) அடிப்படையாகக்கொண்டு எழுந்த $Z = l + \frac{c\ f_2}{f_1 + f_2}$ என்ற சூத்திரத்தைவிட, மேலே முதலில் கூறப்பட்டது பயன்படுத்தச் சிறப்பு வாய்ந்ததாகும்.

குழு அமைப்பு முறை

(1) முதலிலிருந்து, இரண்டு இரண்டு பிரிவுகளாக எடுத்துக்கொண்டு அவைகளின் இரு அலைவெண்களைக் கூட்டிப் பெறுதல்.

(2) முதல் பிரிவையும், அதன் அலைவெண்ணையும் விட்டு விட்டு, இரண்டாவது பிரிவிலிருந்து, இரண்டு இரண்டு அலைவெண்களாக எடுத்துக் கூட்டிப் பெறுதல்.

(3) முதலிலிருந்து, மூன்று மூன்று பிரிவுகளாக எடுத்துக் கொண்டு அவைகளின் மூன்று அலைவெண்களையும் கூட்டிப் பெறுதல்.

(4) முதல் பிரிவையும் அதன் அலைவெண்ணையும் விட்டு விட்டு, இரண்டாவது பிரிவிலிருந்து மூன்று மூன்று அலைவெண்களாக எடுத்துக் கூட்டிப் பெறுதல்.

(5) முதல், இரண்டு பிரிவுகளுக்குரிய அலைவெண்களை விட்டு விட்டு, பின் மூன்று மூன்று பிரிவுகளாக எடுத்துக்கொண்டு, அவைகளின் மூன்று அலைவெண்களையும் கூட்டிப்பெறுதல்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு முகடு காண்க;

இன அளவு	1	2	3	4	5	6	7	8	9
அலைவெண்	24	22	25	26	25	26	24	24	25

இங்கு, முகட்டுப் பிரிவினைக் காணுதல் சிக்கலானதாகும். எனவே, கீழ்க்கண்ட குழு அமைப்பினை மேற்கொள்வோம்.

இன அளவு (1)	அலை வெண் (2)	இரண்டு இரண்டான குழு (3)	இரண்டு இரண்டான குழு (4)	மூன்று மூன்றான குழு (5)	மூன்று மூன்றான குழு (6)	மூன்று மூன்றான குழு (7)
1	24	46				
2	22		47	71		
3	25	51			73	
4	26		51			76
5	25	51		77		
6	26		50		75	
7	24	48				74
8	24		49	73		
9	25					

நெட்டுப் பிரிவின் வரிசை எண்	மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணைக் கொண்ட குழுக்களில் உள்ள இன அளவு				
3	3	4	5	6	
4		4	5		
5		4	5	6	
6			5	6	7
7	3	4	5		

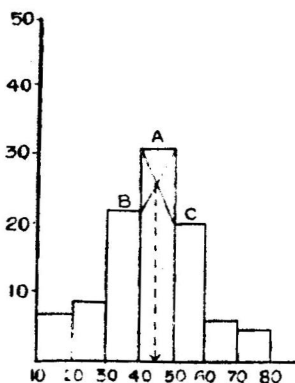
மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுடன் குழுக்களில் மற்றதனை விட மிக அதிகத் தடவைகளில் நிகழும் இன அளவு 5 ஆகும். எனவே, 5 முகடாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

குறிப்பு

மேற்கண்ட இன அளவில் மைய அளவைகளுக்குப் பதிலாக, *0–1, 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7, 7–8, 8–9* என்று மெய்ப்பிரிவுகளாகக் கொடுக்கப்பட்டால், மேற்கண்ட குழு அமைப்பின்படி 4–5 என்ற மெய்ப்பிரிவை முகட்டுப் பிரிவாக எடுத்துக்கொண்டு $Z = l + \frac{(f - f_1)c}{2f - f_1 - f_2}$ என்ற சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்தி முகடு காண்க.

செவ்வகப் படத்திலிருந்து முகடு காணும்விதம்

மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுடைய செவ்வகத்தை *A* என்க. இதற்கு உடன் இடப்புறம், உடன் வலப்புறமாக அமைந்துள்ள செவ்வகங்களை முறையே, *B*, *C* என்க. பின், *B*-யின் மேல் வலப்புற முனையையும் *A*-யின் மேல் வலப்புற முனையையும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் சேர்க்க; அதுபோலவே, *C*-யின் மேல் இடப்புற முனையையும், *A*-யின்மேல் இடப்புற முனையையும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் சேர்க்க. இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் *x*-ஆயத்தூரமே அப் பரவலின் முகடாகும்.



படம் 13.

பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியானது $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$ ஆகும்.

அலைவுப் பரவலில் $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளோடு இணைந்த அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ ஆக அமையுமாயின், $\sqrt[N]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} x_3^{f_3} \ldots\ldots x_n^{f_n}}$ என்பது அப் பரவலின் பெருக்குச் சராசரியெனக் கூறப்படுகிறது. N மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

இலாகிருதம் முறையில் மேற்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திப் பெருக்குச் சராசரி காண்பது எளிதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

5840, 4580, 8504, 8054, 8045 ஆகிய எண்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

பெருக்குச் சராசரி =

$$x = \sqrt[5]{5840 \times 4580 \times 8504 \times 8054 \times 8045}$$

$$\therefore \ \log x = \frac{1}{5}\Big[\log 5840 + \log 4580 + \log 8504 + \log 8054 + \log 8045\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\Big[3.7664 + 3.6609 + 3.9296 + 3.9060 + 3.9058\Big]$$

$$= 3.8337$$

$$\therefore \ x = 6819.$$

எடுத்துக்காட்டு

230 பேர் கொண்ட எடைப் பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

x	$\log x$	f	$f \log x$
77	1.8865	5	9.4325
82	1.9138	15	28.7070
87	1.9395	25	48.4875
92	1.9638	41	80.5158
97	1.9868	50	99.3400
102	2.0086	43	86.3698
107	2.0294	31	62.9114
112	2.0492	14	28.6888
117	2.0682	6	12.4092
மொத்தம்		230	456.8620

பெருக்குச் சராசரி x என்க.

$$\log x = \frac{456.8620}{230}$$

$$= 1.9864$$

$$\therefore \quad x = 96.92$$

ஹார்மானிக் சராசரி

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகளின் வரிசையெனில்,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$ என்பது அவற்றின் ஹார்மானிக் சராசரியாகும்.

அலைவுப் பரவலில், $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$ என்பன n மதிப்புகளாகவும், முறையே அவைகளின் அலைவெண்கள் $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ எனில், அப் பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரியானது

$$\frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{f_n}{x_n}}$$

இங்கு N மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒருவர் முதல் கிலோமீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்திலும், இரண்டாவது கிலோமீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 55 கி.மீ. வேகத்திலும் மூன்றுவது கிலோமீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 50 கி.மீ. வேகத்திலும், தனது காரை ஓட்டிச் செல்கிறுர் எனில், அவரது காரின் சராசரி வேகமென்ன?

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{3}{\frac{1}{60} + \frac{1}{55} + \frac{1}{50}}$$

$$= 54.7 \text{ கி. மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு

230 பேர் கொண்ட எடைப் பரவலுக்கு ஹார்மானிக் சராசரி காண்க.

$x, \frac{1}{x}, f, \frac{f}{x}$ என்ற தலைப்புகளில் பட்டியல் அமைத்துக் கொண்டு $\sum \frac{f}{x}$ ஐக் கண்டு, $\frac{N}{\sum \frac{f}{x}}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, பரவலின் ஹார்மானிக் சராசரி காண்க.

பல்வேறு சராசரிகளின் இணை தராதரங்கள்

ஒரு சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகளை விளக்கி, அப் பண்புகளை நாம் கண்ட பல்வேறு சராசரிகள் எங்ஙனம் திருப்திப் படுத்துகின்றன என்பதைக் காண்போம்.

(1) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தெளிவான சூத்திரமுடையதாக இருக்கவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகியவற்றிற்கு இத்தகைய சூத்திரங்களுண்டு. அவை கணக்கியல் வாயிலாக வழிந்தெடுக்கப்பட்ட சூத்திரங்களாகும். இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றிற்கு அத்தகைய கணக்கியல் சூத்திரங்கள் கிடையா.

(2) பரவல் முழுவதையும் பிரதிபலிக்கும் தன்மை வாய்ந்ததாகவும், அதன்மூலம் பரவலை அறிந்துகொள்வதற்கு ஏதுவாகவும் அமையவேண்டும்.

இப் பண்புநோக்கில், கூட்டுச் சராசரி மிகச் சிறந்தது எனக் கூறலாம். என்றாலும், பரவலின் சராசரியை எந்த நோக்கத்திற்காகக் காணவிருக்கிறோமோ, அதனைப் பொருத்துத் தான் அச் சராசரி அப் பரவலை எத் தன்மையில் பிரதிபலிக்கின்றது எனக் கூறலாம். முன்பே, நாம் கண்டபடி, ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் தரத்தினைக் காணக் கூட்டுச் சராசரி நல்லதொரு பிரதிநிதியாகும். ஒரே வயதுடைய குழுவினருக்கு அங்கிகள் தைத்து விற்பனை செய்வார் ஒருவருக்கு, இடைநிலைதான் நல்லதொரு பிரதிநிதியாக அமையும். எத்தகைய பொருள்களை, எந்த அளவிற்குச் சேமித்து வணிகம் மேற்கொள்ள வேண்டுமென்பவருக்கு முகடுதான் சிறந்ததொரு பரவல் பிரதிநிதியாக இருக்க முடியும். ஆற்றில் இறங்க முற்படுவாருக்கும், கூட்டுச் சராசரி ஆழம் பொருந்துமா?

(3) சராசரியானது, எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாக இருக்கவேண்டும்.

எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் கணக்கில் கொண்டுதான் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரி ஆகியன கணிக்கப்படுகின்றன. ஆனால், இடைநிலை, முகடு ஆகியன எல்லா அம்சங்களையும் கணக்கிட்டில் எடுத்துக்கொள்வதில்லை. ஆனால், இத் தன்மையால், மிக உயர்ந்த, மிகத் தாழ்ந்த தனி அம்சங்கள் கூட்டுச் சராசரியினை மிகவும் பாதிக்கும். ரூ. 200 முதல் ரூ. 300 வரை வருவாயுள்ள 100 பேர்களின் சராசரி வருவாய் காணக் கூட்டுச் சராசரி சிறந்தது; ஆனால், அந்நூறு பேர்களுள் ஒருவரின் வருமானம் மட்டும் ரூ. 10,000 என இருந்தால், கூட்டுச் சராசரி பெரிதும் பாதிக்கப்படும். முகடு, இடைநிலைகளை அத்தகு அம்சங்கள் பாதிக்கமாட்டா. பெருக்குச் சராசரியில் ஓர் அம்சம் பூஜ்யமெனில், பெருக்குச் சராசரியே பூஜ்யமாகிவிடும்.

(4) எளிதான முறையில் கணக்கிட ஏதுவாக இருக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை இரண்டையும் எளிதான முறையில் கணக்கிடலாம். மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகளில், உச்ச அலைவெண் மீண்டும், மீண்டும் நிகழுமானால், அங்கு முகடு காண்பது எளிதன்று. பெருக்குச் சராசரியையும், ஹார்மானிக் சராசரியையும் கணக்கிடக் கையாளப்படும் வழிகள் எளிமையானதாகக் கருதமுடியாது; சற்றுச் சிக்கலானவையேயாம்.

(5) கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்ததாக அமையவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரிக்குச் சிறந்ததொரு கணக்கியல் சூத்திர மிருப்பதால், இது கணக்கியல் வழிமுறைகளுக்கும் துறைகளுக்கும் நன்கு பயன்படுகிறது. பல குழுக்களின் தனித்தனிக் கூட்டுச் சராசரிகள் தெரிந்தநிலையில், அவைகளால் இணைந்த பெரிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரியினை எளிதாகக் காணமுடியும். பெருக்குச் சராசரியும் இத்தகு தன்மை வாய்ந்ததாகும். இது, மாறுதலின் மதிப்பைவிட, மாறுதலின் மதிப்பு விகிதத்தைக் காண நன்கு பயன்படுகிறது. எனவேதான், இது குறியீட்டு எண் கணிப்பு களில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. ஹார்மானிக் சராசரிக்கும் மேலே கண்ட தன்மையுண்டு. இடைநிலைக்கும் முகட்டிற்கும் இத் தன்மை கிடையாது.

(6) நிலையானதாக இருக்கவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி மட்டுமே நிலையானதாகும். மற்றவை நிலையானவை எனக் கூறமுடியாது. தனி அம்சங்களில் ஏற்படு கின்ற சிறு பிழைகள் நிலையான சராசரியைப் பெரிதும் பாதியா.

மேற்கண்ட வாதங்களால், கூட்டுச் சராசரியே மற்றைய சராசரிகளைவிடச் சிறந்தது என்பது தெளிவாகும்.

பல்வேறு பரவல்களை ஒப்பிடும்போது, ஒரே வகையான சராசரியையே கையாளவேண்டும்.

திறன் படைத்த கூட்டுச் சராசரி அல்லது **நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி**

$x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_n$ என்பன n அளவைகள் என்க. அவை களின் திறன்கள் அல்லது நிறைகள் (Weights) முறையே $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ என்க. எனில்,

திறன் படைத்த கூட்டுச் சராசரி அல்லது நிறையிட்ட

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots\dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots\dots + w_n}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_n$ என்ற வெவ்வேறு அளவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றுள்ள இணை முக்கியத்தைக் (Relative importance) கருத்தில்கொள்ள நாம் விழைகின்ற நிலையில், இத்தகு கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்துகின்றோம். குறியீட்டு எண் களைக் கணிக்கின்ற நிலையிலும் இதனைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரு மாணவனின் உண்மையான கல்வித் திறமையைக் கணிக்கின்ற நிலைகளிலும் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். கற்பித்துத் தரப்படும் மணிஅளவுக்கு ஏற்றவாறு வெவ்வேறு பாடங்களோடு திறனைக் கொடுக்கலாம். தரமான இறப்பு வீதத்தினைப் (Standardised death rate) பெற முயலுகின்றபோதும், திறன் படைத்த கூட்டுச் சராசரிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு

உதவிப்பணம் வழங்குவதற்காகத் தகுதியான மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க ஒரு தேர்வு வைக்கப்பட்டது. அத் தேர்வினில் பல்வேறு பாடங்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட திறன்கள் வெவ்வேறானவை. ஒவ்வொரு பாடத்திலும் 50 சதவீதத்திற்குமேல் வாங்கிய உதவிப்பண விண்ணப்பதாரர்கள் மூன்று பேர்களே யாவர். அவர்களின் மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

பாடங்கள்	திறன்	A-யின் மதிப் பெண்கள்	B-யின் மதிப் பெண்கள்	C-யின் மதிப் பெண்கள்
புள்ளியியல்	4	63	60	65
கணக்கியல்	3	65	64	70
பொருளாதாரம்	2	58	56	63
வணிகச்சட்டம்	1	70	80	52

மிக உயர்ந்த மதிப்பெண் பெற்ற தேர்வு எழுதியவருக்கே பண உதவி கிடைக்குமானால், அதனைப் பெறுபவர் யார்?

(ம.ப.)

A-யின் திறன் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{(4 \times 63) + (3 \times 65) + (2 \times 58) + (1 \times 70)}{4 + 3 + 2 + 1}$$

$$= 63.3$$

B-யின் திறன் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{(4 \times 60) + (3 \times 64) + (2 \times 56) + (1 \times 80)}{4 + 3 + 2 + 1}$$

$$= 62.4$$

C-யின் திறன் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{(4 \times 65) + (3 \times 70) + (2 \times 63) + (1 \times 52)}{4 + 3 + 2 + 1}$$

$$= 64.8$$

எனவே, *C* தான் உதவிப்பணம் பெறுவார்.

குத்து மதிப்பான, தரமான சிறப்பு வீதங்கள்

இரு நகரம் அல்லது இரு மாவட்டம் போன்ற வெவ்வேறு இடங்களில் வதியும் மக்களின் உடல்நல நிலையை ஒப்பிடவேண்டி யிருக்கும். அதற்குக் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதத்தினைக் (Crude death rate) கணிக்கின்றோம். இந்த வீதங்களைக் கணிப்பதற்குத் திறன் சராசரிகள் பயன்படுகின்றன. குறைந்த இறப்பு வீத முடைய நகரம் அல்லது இடம், சிறந்த உடல் நலமுடை யோர் வதியும் நகரமாக அல்லது இடமாகக் கருதப்படுகிறது.

குத்துமதிப்பான இறப்பு வீதம்

$$= \frac{\text{ஓர் ஆண்டின் இறந்தவர் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தத் தொகை}} \times 1000$$

$$= \frac{N}{P} \times 1000$$

ஆனால், வேறுபட்ட இரு இடங்களில் வாழும் மக்களின் உடல் நிலையை ஒப்பிட்டு நோக்க, இத்தகு குத்துமதிப்பான இறப்பு வீதங்கள் மிகச் சிறந்ததாகக் கருத முடியாது. ஏனெனில், இரு இடங்களின் இறப்பு வீதங்கள், அவ்விரு இடங்களின் சுற்றுப் புற சுகாதார நிலையை மட்டுமன்றி, அங்குள்ள குழந்தைகள், வயது முதிர்ந்தோரின் எண்ணிக்கையையும் பொருத்ததாகும். எனவே, அவ்விரு இடங்களில் உள்ள மக்கள்தொகையை, பல்வேறு வயதுக் குழுக்களாகப் பிரித்து, இறப்பு வீதங்களுக்கு ஏற்ற திறன்கள் தரவேண்டும். மேலும், இரு இடங்களின் மக்கள்தொகை ஒரே எண்ணாக அமைந்தாலன்றி, இத்தகு திறன் சராசரிவீதங்கள் கையாளப்படக்கூடாது. பொதுவாக, ஓர் இடத்தில் ஒரு வயதுக் குழுவிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கையைத் தரத்திறன் களாக (Standard weights) எடுத்துக்கொள்ளப்படல் வேண்டும். வேறு ஓர் இடத்தின் திறன் சராசரிவீதத்தினைக் கணக்கிட, அதே எண்ணிக்கையைக் கையாளவேண்டும். மற்றோர் இடத்தோடு பொருந்திய ஓர் இடத்தின் தர இறப்புவீதம் மற்றோர் இடத்தின் மக்கள்தொகையை, அதன் மக்கள்தொகையாகக்கொண்டு **குத்து மதிப்பான இறப்புவீத**மென வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

A, B ஆகிய இரு நகரங்களில், பல்வேறு வயதுக் குழுக்களில் மக்கள்தொகை எண்ணிக்கையும், இறப்பு எண்ணிக்கையும் கீழ்க் காணும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு நகரங்களில், உடல்நலமிக்கோர் கொண்ட நகரமாக எதனைக் கருதலாம்? ஏன்?

வயது	நகரம் *A* மக்கள் தொகை எண்ணிக்கை (தர மக்கள் தொகை எண்ணிக்கை)	*A*-யின் இறந்தோர் எண்ணிக்கை	நகரம் *B* மக்கள் தொகை எண்ணிக்கை	*B*-யின் இறந்தோர் எண்ணிக்கை
0–5	16,000	370	5,000	150
5–40	20,000	120	12,500	65
40–75	60,000	400	29,500	375
75-ற்கு மேல்	4,000	380	3,000	45
மொத்தம்	1,00,000	1,270	50,000	635

A-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம்

$$= \frac{1270}{1,00,000} \times 1,000$$

$$= 12.7$$

B-யின் குத்துமதிப்பான இறப்பு வீதம்

$$= \frac{635}{50,000} \times 1,000$$

$$= 12.7$$

நகரம் A-யினைத் தரமானதாகக்கொண்டு அதனோடு பொருந்திய B-யின் தர இறப்புவீதம்

$$= \frac{\left(\frac{150}{5,000} \times 1,000 \times 16,000\right) + \left(\frac{65}{12,500} \times 1,000 \times 20,000\right) + \left(\frac{375}{29,500} \times 1,000 \times 60,000\right) + \left(\frac{45}{3,000} \times 1,000 \times 4,000\right)}{16,000 + 20,000 + 60,000 + 4,000}$$

$= \mathbf{14.1}$

எனவே, A-யைவிட B-யில் உள்ளவர் உடல்நலம் நலிந்தவர்களே!

பயிற்சி

1. 16 வயது நிரம்பியவர்களின் எடைப்பரவல் வருமாறு:

எடை (பவுண்டில்)	85	90	95	100	105	110	
அலைவெண்	2	4	12	20	28	35	
எடை (பவுண்டில்)	115	120	125	130	135	140	145
அலைவெண்	36	30	23	16	10	6	3

இதற்குரிய ஓகைவ் வரைந்து, வரையிலிருந்து இடைநிலை, முகட்டினைக் காண்க. கூட்டுச் சராசரியினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

2. 800 கார்ன் பயிர்களின் நீளப்பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

நீளம் (அங்குலத்தில்)	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	1	1	8	33	70	110	170
நீளம் (அங்குலத்தில்)	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	172	124	61	32	10	2	

இப் பரவலின் மையப்போக்கின் அளவைகளில் மூன்றினைக் கணக்கிட்டுக் காட்டுக. (செ.ப.)

3. ஒரு நாட்டின் ஒரு பகுதியில் குழந்தைகள் நடக்கத் துவங்கும் வயதினைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தரு கிறது:

வயது (மாதங்களில்)	8–8.9	9–9.9	10–10.9	11–11.9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1	9	20	29
வயது (மாதங்களில்)	12–12.9	13–13.9	14–14.9	15–15.9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	60	32	30	14
வயது (மாதங்களில்)	16–16.9	17–17.9		
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	8	1		

இப் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகட்டினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

4. கீழ்க்கண்ட அலைவுப்பரவலில் ஐந்தாவது அலைவெண் தெரியவில்லை. கூட்டுச் சராசரி 106 எனத் தெரிகிறது. காணுமற்போன அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக.

ரூபாய்	அலைவெண்	ரூபாய்	அலைவெண்
50–60	1	100–110	155
60–70	6	110–120	75
70–80	20	120–130	52
80–90	41	130–140	21
90–100	?	140–150	15

(செ.ப.)

5. 100 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 47. வேறு 250 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 52. அந்த 350 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

6. 1 முதல் 10 வரை பதிவெண்களாகக்கொண்ட பி.காம். மாணவர்கள் ஒரு தேர்வினில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன:

பதிவெண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

(அ) முகடு; (ஆ) இடைநிலை; (இ) கூட்டுச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. எந்தச் சராசரி மிக நம்பத்தக்கது என்பதைக் காரணத்துடன் சுட்டிக்காட்டுக. (செ.ப.)

7. ஓர் இந்திய நகரத்தில் ஆண்களின் எண்ணிக்கைப் பரவலைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. கூட்டுச் சராசரியினையும், இடைநிலையினையும் காண்க.

வயதுக்குழு	1.	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
	2.	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ஆண்கள்	1.	2756	2124	1677	1481	1021
	2.	610	245	67	16	3

(செ.ப.)

8. ஒரு சராசரி தரும் பலன் யாது? உமக்குத் தெரிந்த வெவ்வேறு வகையான சராசரிகளை உபயோகிக்கும் போது எத்தகு தவறுகள் (fallacies) நேராவண்ணம் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்? (செ.ப.)

9. இடைநிலையை ஒரு சராசரியாக எடுத்துக்கொண்டால், அதனது சீர்களும் சிறுமைகளும் யாவை? (செ.ப.)

10. ஒரு தேர்வினில் 199 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் காட்டும் அலைவெண் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

மதிப்பெண்கள்	0-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை:	21	19	60	42	24	18	15

இடைநிலையையும், மதிப்பெண் 35 பெற்றால் தேர்ச்சி பெற்றவரெனக்கொண்டு, தேர்ச்சி பெற்றவர்களின் சதவீதத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

11. சராசரி என்றால் என்ன? நல்லதொரு சராசரிக்குள்ள இயல்புகள் யாவை? ஒரு வாய்ப்பாடுப் புத்தகத்திலிருந்து ராண்டமாக 200 எண்கள் பொறுக்கப்பட்டன. அவைகளின் அலைவெண்கள் வருமாறு:

எண்கள்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
அலைவெண்	18	19	23	21	16	25	22	20	21	15

மேற்கண்ட பரவலுக்கு ஏதாவது இரு சராசரி அளவைகளைக் காண்க. (செ.ப.)

12. புள்ளியியலில் பல்வேறு சராசரிகளைப் பற்றி ஆய்வுரை வழங்குக.

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை ஆகியவற்றைக் காண்க:

பண்ணையின் பரப்பளவு	50 வரை	50-100	100-150	150-200	200-250	250-ற்குமேல்
பண்ணையில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை	57	256	132	25	10	12

(செ.ப.)

13. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரியும் இடைநிலை யும் காண்க:

கூலி (ரூபாயில்)	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
அலை வெண்	4	16	60	100	40	6	4

நீங்கள் எடுத்துக்கொள்ளும் பிரிவுகளை விளக்குக. (செ.ப.)

14. கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு இடைநிலை, முகடு ஆகிய வற்றைக் காண்க:

வராத நாள்கள்	மாணவர்கள்
5-ற்குக் கீழ்	59
10-ற்குக் கீழ்	224
15-ற்குக் கீழ்	465
20-ற்குக் கீழ்	582
25-ற்குக் கீழ்	643
30-ற்குக் கீழ்	644
35-ற்குக் கீழ்	650
40-ற்குக் கீழ்	653
45-ற்குக் கீழ்	655

(செ.ப.)

15. கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து சராசரிக் கூலியைக் காண்க:

கூலி (...ரூபாய்க்கு மேல்)	0	10	20	30	40	50	60	70
கூலியாள்களின் எண்ணிக்கை	650	500	425	375	300	275	250	100

(வழி: கடைசிப் பிரிவு திறந்த பிரிவு; எனவே, இடைநிலையைக் கணக்கிடுக). (செ.ப.)

16. பின்வருவனவற்றில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றில் நீங்கள் எந்தச் சராசரியினை முதல்தரமானதாகக் கருதுகிறீர்கள்?

(அ) ஒரு தேர்வினில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்.

(ஆ) கிரிக்கெட் விளையாட்டில் பந்தடிப்பவர்கள் பெறும் ஸ்கோர்.

(இ) ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள இயக்குநர்களின் கூலிகள்.

தங்களது விடைகளுக்குக் காரணங்கள் தருக. (செ.ப.)

17. கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு இடைநிலை காண்க:

கூலி (ரூபாயில்)	60–70	50–60	40–50	30–40	20–30
கூலியாள்களின் எண்ணிக்கை	5	10	20	5	3

(செ.ப.)

18. ஒரு தொழிற்சாலையின் வாரக்கூலிப் பரவலைக் கீழ்க் காணும் பட்டியல் தருகிறது. கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

கூலி (ரூபாயில்)	14–20	21–27	28–34	35–41	42–48	49–55
ஆள்களின் எண்ணிக்கை	52	95	170	280	61	42

(செ.ப.)

19. ஒரு தேர்வினில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரியையும், இடைநிலையினையும் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
மாணவர்கள்	12	21	23	34	10

(ம.ப.)

20. கீழ்க்கண்டவற்றிற்குக் கூட்டுச் சராசரியையும் இடைநிலையையும் காண்க:

மதிப்பு	அலைவெண்	மதிப்பு	அலைவெண்
0—4	328	40—49	524
5—9	350	50—59	378
10—19	720	60—69	244
20—29	664		
30—39	598		

(கே.ப.)

21. ஒரு கல்லூரியில் 510 புகுமுக வகுப்பு மாணவர்களின் புத்திக்கூர்மை ஈவெண்கள் வருமாறு:

புத்திக்கூர்மை ஈவெண்கள்	20—29	30—39	40—49	50—59
மாணவர்கள்	41	52	61	190

புத்திக்கூர்மை ஈவெண்கள்	60—69	70—79	80—89	90—99
மாணவர்கள்	67	45	40	14

இதற்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியன கணக்கிடுக. இவைகளுக்கிடையேயுள்ள நடைமுறை உறவின் பயன்பற்றிப் பரவலின் தன்மைக்கு ஆய்வுக் கருத்துத் தருக. (அ.ப.)

22. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தை உற்று நோக்குக. எது, மற்றதனைவிடச் சிறந்த விளையாட்டுக் குழு என்பதனைக் கூறுக. காரணம் தருக.

உள்ளூர் விளையாட்டு மைதானத்தில்

விளையாட்டுக் குழு	விளையாடிய போட்டிகள்	பெற்ற கோல் ஸ்கோர்கள்	சராசரி
X	17	56	3.29
Y	19	64	3.55

வெளியூர் விளையாட்டு மைதானத்தில்

விளையாட்டுக் குழு	விளையாடிய போட்டிகள்	பெற்ற கோல் ஸ்கோர்கள்	சராசரி
X	26	43	1.15
Y	43	53	1.26

(செ.ப.)

23. வாய்விடை ஒவ்வொன்றுக்கும் மீப்பெரு மதிப்பெண்ணுக 25-ம், எழுத்து விடை ஒவ்வொன்றுக்கும் மீப்பெரு மதிப்பெண்ணுக 75-ம் கொண்ட *A*, *B*, *C* ஆகிய மூன்று பாடங்களில் ஒரு மாணவர் தேர்விற்குத் தோன்றினர். வாய்விடைகளில் முறையே 15, 11, 19 மதிப்பெண்களும், எழுத்து விடைகளில் முறையே 55, 32, 28 மதிப்பெண்களும் பெற்றுர். ஒரு பாடத்தினில் எழுத்து விடை மதிப்பெண்ணில் வாய்விடை மதிப்பானது பெறும் சதவீதத்தைத் திறனுகக்கொண்டு, எழுத்து விடைமூலம் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்குத் திறன் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக: (ப.ப.)

5. பரவுகை அளவைகள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரம், எந்த அளவில் பரவிச் சிதறிக் கிடக்கின்றது என அறிந்தால், அப் புள்ளிவிவரத்தின் பிற தன்மைகளை அறியவும், வேறொரு புள்ளிவிவரத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் ஏதுவாகும். ஒரே கூட்டுச் சராசரியுடைய இரு புள்ளி விவரக் குழுக்கள் எல்லா அம்சங்களிலும் குண இயல்புகளிலும் ஒத்த தன்மையானதெனக் கூறமுடியாது; புள்ளிவிவரங்கள் வேறு பட்ட தன்மையில் சிதறிப்பரந்து கிடக்கலாம். புள்ளிவிவரங்களின் அத்தகு சிதறலைச் **'சிதறல்'** அல்லது **'பரவுகை'** (Dispersion) எனக் கூறுகிறோம். அத் தருணங்களில் ஒப்பிட்டுநோக்க, பரவுகை அளவைகள் (Measures of Dispersion) பெரிதும் பயன்படுகின்றன. அப் பரவுகை அளவைகள் வருமாறு:

(1) வீச்சு (Range);

(2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation);

(3) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation);

(4) திட்டவிலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம் (Standard Deviation).

வீச்சு

ஒரு பரவலிலுள்ள மிகப் பெரிய மிகச் சிறிய மதிப்புகளின் வேறுபாடே **வீச்சா**கும்.

ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களின் ஆண்டு வருவாய்களில் மிகப் பெரியது ரூ. 8,500; மிகச் சிறியது ரூ. 5,000 எனில், அக் குழுவின் வீச்சு ரூ. 3,500 ஆகும்.

கால்மான விலக்கம்

ஒரு வெற்று எண் குழுவின் மொத்த அலைவெண் N என்க. ஓர் எண்ணில் I என்பது முழுஎண் பகுதியையும், F என்பது தகுபின்னப் பகுதியையும் காட்டுகிறது எனக்கொள்க. வெற்றெண் குழுவொன்றினை, ஏறு வரிசையில் அமைத்தால்,

$\frac{N}{4} = I + F$ என அமையுமாயின், $I + 1$-வது மதிப்பே முதல் கால்மானம் (First Quartile) Q_1 ஆகும்; $\frac{N}{4} = I$-ஆக அமைந்தால், I-ஆவது, $I + 1$-வது மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியே Q_1 எனக் கொள்ளவேண்டும். இதுபோன்றே, $\frac{3N}{4} = I + F$ அல்லது I-என்பதற்கேற்ப மூன்றும் கால்மானம் Q_3-ஐ $I + 1$-வது அல்லது I, $I + 1$-வது மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொள்ள வேண்டும்.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $\frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பே, அப் பரவலின் முதல் கால்மானம் Q_1 ஆகும். $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட மதிப்பு மூன்றும் கால் மானம் Q_3 ஆகும்.

$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பது கால்மான விலக்கமாகக் கொள்ளப் படுகிறது.

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $\frac{N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட பிரிவினை முதல் கால்மானப் பிரிவு என அழைக்கிறோம்; இதுபோன்றே $\frac{3N}{4}$ ஐக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட பிரிவினை மூன்றும் கால்மானப்பிரிவு என அழைக்கிறோம். முதல் கால் மானப்பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க; முதல் கால்மான மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க; முதல் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் f என்க. பிரிவின் தூரம் c யெனில்,

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)c}{f}$$

மூன்றும் கால்மானப் பிரிவிற்கு முந்திய குவிவு அலைவெண் m என்க; மூன்றும் கால்மான மெய்ப்பிரிவின் கீழ்எல்லை l என்க; மூன்றும் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண் f என்க. பிரிவின் தூரம் c யெனில்,

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)c}{f}$$

$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என்பதே அப் பரவலுக்குரிய கால்மான விலக்கமாகும்.

குறிப்பு

மேலே கண்ட வாதத்தில் $\frac{N}{4}$ தருவது கால்மானம்; $\frac{3N}{4}$ தருவது மூன்றும் கால்மானம். இதுபோன்றே, $\frac{rN}{10}$ தருவது r-ஆவது பத்துமானம் (Decile); $\frac{rN}{100}$ தருவது r-ஆவது நூற்றுமானம் (Percentile) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வெற்று எண் குழுவில் 9-வது பத்துமானம் காணவேண்டுமென்றால், அது $\frac{9N}{10} = I + F$ என்பதில் F-ஆனது O அல்லது ஒரு தகு பின்னமாக அமைவதற்கேற்ப, I-ஆவது மதிப்பாக, I, $I+1$-ஆவது மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரியாக அமையும். ஓர் அலைவுப் பரவலில் அதனைக் காண

$$Q_{\frac{9}{10}} = l + \frac{\left(\frac{9N}{10} - m\right)c}{f}$$

என்ற சூத்திரம் ஆகும். இச்சூத்திரத்தில் எழுத்துக்கள் எதனைப் பிரதிபலிக்கின்றன என்பதை மாணவர் எளிதில் அறியலாம். இதுபோன்றே நூற்றுமானத்திற்குரிய சூத்திரங்களை மாணவரே எழுதிக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

19 தொழிலாளர்களின் மாதவருமானம் வருமாறு:

60, 75, 68, 74, 92, 90, 70, 57, 64, 84, 76, 86, 94, 98, 100, 95, 87, 97, 88

ஏறு வரிசையில் அமைத்தால்,

57, 60, 64, 68, 70, 74, 75, 76, 84, 86, 87, 88, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 100

$$Q_1 = 5\text{-ஆவது மதிப்பு} = 70$$

$$Q_3 = 15\text{-ஆவது மதிப்பு} = 94.$$

$$\therefore \text{ கால்மான விலக்கம் } = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{94-70}{2}$$

$$= 12.$$

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் 1,000 மனிதர்களின் வயது காட்டப்பட்டுள்ளது. அதனது கால்மான விலக்கத்தினைக் கணக்கிடுக.

வயது	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55
எண்ணிக்கை	33	112 ✓	152	154 ✓	136	118	96

வயது	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85
எண்ணிக்கை	74	54	37	21	9	4

x	f	cf
20–25	33	33
25–30	112	145
30–35	152	297 → Q_1
35–40	154	451
40–45	136	587
45–50	118	705
50–55	96	801 → Q_3
55–60	74	875
60–65	54	929
65–70	37	966
70–75	21	987
75–80	9	996
80–85	4	1,000

$$\frac{N}{4} = \frac{1{,}000}{4} = 250; \; \frac{3N}{4} = 750$$

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)c}{f}$$

$$= 30 + \frac{(250 - 145)^5}{152} = 33.5$$

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)c}{f}$$

$$= 50 + \frac{(750 - 705)^5}{96} = 52.3$$

கால்மான விலக்கம்

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{52.3 - 33.5}{2}$$

$$= 9.4.$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

ஏதாவது ஒரு சராசரியிலிருந்து தனிஅம்சங்களின் எண் அளவை விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியே கூட்டுச் சராசரி விலக்கமாகும். வழக்கமாகக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சிலசமயங்களிலும், இடைநிலையிலிருந்து சிலசமயங்களிலும் தனிஅம்சங்களின் எண்அளவை விலக்கங்களைக் காண்கிறோம். எனவே, வெற்றுஎண் கூட்டங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண, $\frac{\sum |x_r - A|}{N}$ என்பதனைச் சூத்திரமாகக்கொள்ளலாம்; இங்கு A அவ்வெண் கூட்டத்தின் சராசரி (கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை) ஆகும்.

ஓர் அலைவுப்பரவலில், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $\frac{\sum f_r |x_r - A|}{N}$ ஆகும். ஆனால், இந்தச் சூத்திரத்தினை அப்படியே பயன்படுத்தாமல், வசதியான ஏற்றதொரு மூலஅளவையை (Origin) எடுத்துக் கொண்டு கூட்டுச் சராசரி காண்பதுபோல இவைகளையும் கணக்கிட இயலும்.

A-ஆனது x_r; x_{r+1} என்பனவற்றிற்கு இடையில் அமைந்தால், $x_r - x_{r+1}$ என்ற பிரிவிற்குள் அமைந்த வசதியான ஒரு மதிப்பை மூலமதிப்பாகக் கொள்ளவேண்டும்.

எதிர்மறை (அல்லது குறை) விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - \alpha + \alpha - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - \alpha) + (\alpha - A) \sum_{i=1}^{r} f_i$$

நேர்மறை (அல்லது மிகை) விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=r-1}^{n} f_i (x_i - \alpha + \alpha - A)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - \alpha) + (\alpha - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

∴ விலக்கங்களின் எண் அளவைக் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i | x_i - \alpha | + \sum_{i=r+1}^{n} f_i | x_i - \alpha | - (\alpha - A) \sum_{i=1}^{r} f_i + (\alpha - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i | x_i - \alpha | - (\alpha - A) \left\{ \sum_{i=1}^{r} f_i - \sum_{i=r+1}^{n} f_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i | x_i - \alpha | - (\alpha - A) (N_1 - N_2)$$

$= D$ (என்க)

இங்கு $N_1 =$ முதல் r அலைவெண்களின் கூடுதல்

$N_2 =$ மிஞ்சிய அலைவெண்களின் கூடுதல்

∴ கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம் $= \dfrac{D}{N}$

ஒரு வெற்றுஎண் கூட்டத்தில், இடைநிலையிலிருந்து கண்ட எண்அளவை விலக்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறியதாகும் என

ஏற்கனவே கண்டுள்ளோம். எனவே, கூட்டுச் சராசரி விலக்க மானது, இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடும்போது மீச்சிறியதாக அமையுமென்பது பெறப்படும். ஆனால், இத்தேற்றம் ஒரு தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டு

1,000 பேர்களின் வயதுப் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானங்களைக் கணக்கிடுக.

x	f_r	d_n	$f_r\, d_r$	$c\, f_r$
20–25	33	–3	–99	33
25–30	112	–2	–224	145
30–35	152	–1	–152	297
35–40	154	0	0	451
40–45	136	1	136	587 ←M
45–50	118	2	236	705
50–55 ✓	96	3	288	801
55–60	74	4	296	875
60–65	54	5	270	929
65–70	37	6	222	966
70–75	21	7	147	987
75–80	9	8	72	996
80–85	4	9	36	1000
மொத்தம்	1,000		1,228	

$$\bar{x} = 37.5 + \frac{1{,}228 \times 5}{1{,}000} = 43.64$$

$$\text{இடைநிலை} = 40 + \frac{(500 - 451)^5}{136} = 41.8$$

x	f_r		$\lvert d_r \rvert$	$f_r \lvert d_r \rvert$
20–25	33	N_1	4	132
25–30	112		3	336
30–35	152		2	304
35–40	154		1	154
40–45	136		0	0
45–50	118		1	118
50–55	96		2	192
55–60	72		3	222
60–65	54		4	216
65–70	37		5	185
70–75	21		6	126
75–80	9		7	63
80–85	4		8	32
மொத்தம்	1,000			2,080

$$N_1 = 587: \quad N_2 = 413.$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம் (கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து)

$$= \frac{(2{,}080 \times 5) - (42.5 - 43.64)\ (587 - 413)}{1{,}000}$$

$$= 10.598$$

இடைநிலை $= 41.8$

இதுவும் 40–45 என்ற பிரிவில் இருப்பதால், $\alpha = 42.5$ என எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையிலிருநது)

$$= \frac{(2{,}080 \times 5) - (42.5 - 41.8)\ (587 - 413)}{1{,}000}$$

$$= 10.278.$$

திட்ட விலக்கம்

ஏதாவது ஒரு சராசரியிலிருந்து தனிமதிப்புகளின் விலக்கங்களில் சில நேர்மறையாகவும், பிற எதிர்மறையாகவும் இருக்கும். அவைகளை எண் அளவில் மட்டும் எடுக்கும்போது, பரவுகை

மதிப்பு ஓரே அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது. இதனை நீக்கிப் பரவுகை யளவையினைக் கணக்கியல் துல்லியமாகப் பெறமுடியும். நேர், எதிர்மறை என்ற அடையாளங்களை நீக்குவதற்காக விலக்கங்களை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து, இறுதியில் வர்க்கமூலப்படுத்திப் பெறப்படுவதைப் பரவுகைஅளவை யாகக் கொள்ளலாம். கணக்கியல்படியும், பிற பரவுகை அளவை களின் இயல்புப்படியும், இதுவே மிகச் சிறந்த அளவையாகும். இதனை வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்கவிலக்கம் எனக் கூறுகிறோம். கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைக்கண்டு வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டி, மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து வர்க்கமூலம் கண்டால், அதனைத் **திட்டவிலக்கம்** அல்லது **தரவிலக்கம்** எனக்கூறுகிறோம். முன்னதை s என்ற குறியாலும், பின்னதை σ என்ற குறியாலும் எழுதுவது மரபாகும். எனவே,

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_r (x_r - A)^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_r (x_r - \bar{x})^2}{N}}$$

$d = \bar{x} - A$ **எனில்** $s^2 = \sigma^2 + d^2$ **என நிறுவுதல்**

$$x_r - A = (x_r - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad (x_r - A)^2 = (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 + 2(x_r - \bar{x})(\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad \sum f_r (x_r - A)^2 = \sum f_r (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 \sum f_r + 2(\bar{x} - A) \sum f_r (x_r - \bar{x})$$

ஆனால் $\sum f_r (x_r - \bar{x}) = 0$ (கூட்டுச் சராசரியின் முதல் சிறப்பியல்புப்படி)

$$\therefore \quad \sum f_r (x_r - A)^2 = \sum f_r (x_r - \bar{x})^2 + N d^2$$

$$\therefore \quad \frac{\sum f_r (x_r - A)^2}{N} = \frac{\sum f_r (x_r - \bar{x})^2}{N} + d^2$$

(அ-து) $s^2 = \sigma^2 + d^2$

குறிப்பு

$\sigma^2 = s^2 - d^2$ எனவே, திட்டவிலக்கம்தான் மற்றைய வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்கவிலக்கங்களைவிடச் சிறியது என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டு

1,000 பேர் வயதுப் பரவலுக்குரிய திட்டவிலக்கத்தினைக் கணக்கிடுக.

x	f_r	d_r	$f_r\,d_r$	$f_r\,d_r^2$
20–25	33	–3	– 99	297
25–30	112	–2	–224	448
30–35	152	–1	–152	152
35–40	154	0	0	0
40–45	136	1	136	136
45–50	118	2	236	472
50–55	96	3	288	864
55–60	74	4	296	1,184
60–65	54	5	270	1,350
65–70	37	6	222	1,332
70–75	21	7	144	1,008
75–80	9	8	72	576
80–85	4	9	36	324
மொத்தம்	1,000		1,228	8,143

$$\sigma^2 = \left\{ \frac{\Sigma f_r\, d_r^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_r\, d_r}{N} \right)^2 \right\} c^2$$

$$= \left\{ \frac{8,143}{1,000} - \left(\frac{1,228}{1,000} \right)^2 \right\} \times 5^2$$

$$= \frac{(81,43,000 - 15,07,984)}{1,000^2} \times 5^2$$

$$= \frac{66,35,016 \times 5^2}{1,000^2}$$

$$\sigma = \sqrt{66,35,016} \times \frac{5}{1,000}$$

$$= 12.875.$$

குறிப்பு

ஒரு வெற்றுஎண் கூட்டத்திற்குத் திட்டவிலக்கம் காண $f_r = 1$ எனக்கொள்க.

பரவற்படி

σ^2 வை இணைமாறுபாடு அல்லது பரவற்படி (Variance) என அழைக்கின்றோம்; புள்ளியியலின் மேற்படிப்பிலும் பல்வகை ஆய்வுகளில் இது மிகப் பயன்படுகிறது.

நிகழ்பிழை

0.6745 σ-வினை **நிகழ்பிழை** (Probable Error) என அழைக்கின்றோம். ஒரு மாதிரிப் பரவலின் திட்டவிலக்கத்திற்குத் **திட்டப்பிழை** (Standard Error) எனப் பெயருமுண்டு. நிகழ்பிழைக்கும் திட்டப்பிழைக்குமுள்ள வேறுபாட்டினை மாணவர் நன்கு அறியவேண்டும்.

திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைவிடப் பெரியது

$$\frac{\sum d_r^2}{N} > \frac{\sum d_r}{N} \cdot \frac{\sum d_r}{N} \quad \{\text{கணக்கியல்படி}\}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{\sum d_r^2}{N} > \left(\frac{\sum d_r}{N}\right)^2$$

∴ ஒரு வெற்றுஎண் குழுவில்

$\sigma^2 >$ (சராசரி விலக்கம்)^2

∴ திட்ட விலக்கம் > கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம்

சமச்சீராக அல்லது ஏறத்தாழ சமச்சீராக அமைந்த ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ திட்டவிலக்கம். கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ திட்டவிலக்கம். மேற்கண்ட உறவுகள், கணக்கியல் வாயிலாக அல்லது நடைமுறையில் கண்ட குத்திரங்களாகும்.

பல்வேறு குழுக்களின் திட்ட விலக்கம்

n_1 அம்சங்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_1}$; திட்டவிலக்கம் σ_1 என்க. n_2 அம்சங்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_2}$; திட்டவிலக்கம் σ_2 என்க. எனில், அவ்விரண்டும் இணைந்த பெரிய குழுவின் திட்டவிலக்கம் σ-வை.

$$N\sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + u_2 d_2^2$$

என்பது தருகிறது. இங்கு $N = n_1 + n_2$; $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$; $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$; $\bar{x}$ = இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி.

நிறுவுதல்:

$$N\sigma^2 = \sum_{1}^{N} (x_r - \bar{x})^2 = \sum_{n_1 \text{ உறுப்புகள்}} (x_r - \bar{x})^2 + \sum_{n_2 \text{ உறுப்புகள்}} (x_r - \bar{x})^2$$

(இங்கு $N = n_1 + n_2$)

மேலும் $s_1^2 = \sigma_1^2 + d_1^2 \quad = n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2$

(∵ ஒவ்வொரு பிரிவிலும் $\bar{x}$ ஏதாவதொரு விருப்பு ஆதியாகக் கொள்ளப்படுகிறது)

$$s_2^2 = \sigma_2^2 + d_2^2$$

$$\therefore\ n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$$

(அ-து) $N \sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$

குறிப்பு

இதனை இரண்டிற்கு மேற்பட்ட குழுக்களுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

$$N \sigma^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3 (\sigma^2 + d_3^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு

மூன்று டாக்டர்கள் மூன்று குழுவினரைப் பரிசோதனை செய்து கண்ட பருமன் விவரம் வருமாறு:

டாக்டர்கள்	குழுவின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி (பவுண்டில்)	திட்டவிலக்கம் (பவுண்டில்)
A	50	113	6
B	60	120	7
C	90	115	8

மூன்றும் இணைந்த பெரிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க. (செ.ப.)

இங்கு,

$$\bar{x}_1 = 113; \quad \bar{x}_2 = 120; \quad \bar{x}_3 = 115$$

$$n_1 = 50; \quad n_2 = 60; \quad n_3 = 90$$

$$\sigma_1 = 7; \quad \sigma_2 = 7; \quad \sigma_3 = 8$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{(50 \times 113) + (60 \times 120) + (90 \times 115)}{50 + 60 + 90} = 116$$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 113 - 116 = -3$$
$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 120 - 116 = 4$$
$$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 115 - 116 = -1$$

$$N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 + n_3 d_3^2$$
$$= n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3(\sigma_3^2 + d_3^2)$$
$$= 50\,(36+9) + 60\,(49+16) + 90\,(64+1)$$
$$= 12{,}000$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{12{,}000}{200} = 60$$

$$\therefore \sigma = 7.7.$$

செப்பர்டின் திருத்தம்

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்டவிலக்கத்தையும் காணும் போது ஓர் அலேவுப்பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அடங்கியுள்ள அம்சங்கள், அப் பிரிவின் மையப்புள்ளி எந்த அளவினைக் (அலே வெண்ணை) கொண்டிருக்கிறதோ அதே அளவைக் கொண்டிருப் பதாக வைத்துக்கொள்கிறோம். இந்த அனுமானத்தில் சிறிது விலக்கம் ஏற்படுவதுமுண்டு. கூட்டுச் சராசரிக்கு மேலும் கீழும் தனி அம்சங்கள் சமமாகப் பிரிந்து கிடந்தால், இந்த விலக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சரிசெய்துகொண்டு, நிகர நிலேயில் குறிப்பிடத் தக்க பிழையில்லாமல் போய்விடுகிறது. ஆனல், திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுகையில், விலக்கங்களின் வர்க்கங்களே எடுத்துக்கொள்ளு கிறோமாகையால், இப் பிழை மிகையாக விரிவதற்கு ஏதுவாகிறது.

அப்பிழை $\frac{c^2}{12}$ -ஆக இருக்குமெனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது; c என்பது பிரிவின் தூரமாகும். எனவே, கணக்கிடப்பட்ட பரவற்படியிலிருந்து $\frac{c^2}{12}$-ஐக் கழிக்கப் பெறப்படுவதுதான் பிழைத் திருத்தப்பட்ட பரவற்படியாகும்.

மொத்த அலேவெண் 1,000-க்கு மேற்படுகின்ற நிலேயில் அல்லது 20-க்குட்பட்ட பிரிவுகள் அமைந்த அலேவுப் பரவலிலும், மேலும் மணிவடிவ அல்லது சிறிய நிலேயில் அசமநிலேயுடைய சமச்சீர் பரவலிலும், இந்தப் பிழைத் திருத்தத்தினே மேற்கொள்ள வேண்டும் என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

பரவுகை இணை அளவைகள்

இருவித அலைவுப் பரவல்கள் வெவ்வேறு மூலஅளவைகளைக் கொண்டதாக இருக்கலாம்; எடுத்துக்காட்டாக, மாணவர்களின் பருமனைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்று, பிறிதொன்று மாணவர்கள் படிக்கும் நேரப் பரவலைக் காட்டுவதாகக்கொள்வோம். இவைகளின் பரவுகை அளவைகள் முறையே கிலோ, மணி ஆகிய வெவ்வேறு மூல அளவைகளில் சொல்லப்படும். பரவல்களைப் பரவுகை அளவைகளைக்கொண்டு அந்நிலையில் அப்படியே ஒப்புநோக்க முடியாது. அப் பரவுகை அளவைகளை, அப் பரவல்களின் சராசரி களால் வகுத்தால், மூலஅளவை விடுபட்டு, அளவை எண் வடிவத்தில் அமைய, ஒப்பிட்டுநோக்க மிக ஏதுவாக இருக்கும். எனவே, அத்தகைய அளவை $\frac{\text{பரவுகை அளவை}}{\text{சராசரி}}$ யாகும். இதனைப் **பரவுகை இணை அளவை** எனக் கூறுகிறோம்.

இதனைப் **பரவுகைக் கெழு** (Coefficient of dispersion) எனவும் அழைக்கின்றோம்.

1. $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

2. $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

3. $\frac{\text{கால்மான விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

4. $\frac{\text{திட்டவிலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

முதலியன அத்தகு பரவுகைக் கெழுக்களாகும். இவைகளுள் மிகச் சிறப்பானது இறுதியாகக் கூறப்பட்ட $\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ஆகும். இந்தக் குறிப்பிட்டக் கெழுவினை **'மாறு விகிதக் கெழு'** அல்லது **'மாற்றுக் கெழு'** (Coefficient of Variation) எனவும் அழைக்கின்றோம். இதனைச் சதவீதத்தில் குறிப்பிடுவது புள்ளியியல் மரபாகும். இம் மாறுவிகிதக்கெழு ஒரு பரவலில் மதிப்பு

களின் நிலைப்புத்தன்மையை (Consistency) அளக்கவும் பயன்படுகிறது. இரு பரவல்களில் எக்கெழு சிறியதோ, அதன் நிலைப்புத் தன்மை மற்றதனைவிட அதிகமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

இரு மாணவர்கள் *A*, *B* மொத்தம் 8 சோதனைகளில் ஒரே பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

A	65	66	67	68	69	71	72	73
B	67	68	64	68	72	70	69	70

A, *B* ஆகியவர்களுள் யார் மிகத் திறமைசாலி? யார் மிக நிலைப்புத் தன்மையுடையவர்?

$$A\text{-யின் கூட்டுச் சராசரி} = \frac{551}{8} = 68.9$$

$$B\text{-யின் கூட்டுச் சராசரி} = \frac{548}{8} = 68.5$$

எனவே, மாணவர் *A*, *B*-யை விடத் திறமைசாலி.

A:

x:	65	66	67	68	69	71	72	73
d:	−3	−2	−1	0	1	3	4	5
d^2:	9	4	1	0	1	9	16	25

$\Sigma d^2 = 65$

$$\sigma^2 = \left[\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2\right] = \frac{65}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{471}{64}$$

$$\therefore A\text{-யின் மாறுவிகிதக் கெழு} = \sqrt{\frac{471}{64}} \times \frac{1}{68.9}$$

$$= 0.03983$$

B:

x:	67	68	64	68	72	70	69	70
d:	−1	0	−4	0	4	2	1	2
d^2:	1	0	16	0	16	4	1	4

$\Sigma d^2 = 64$

$$\sigma^2 = \frac{64}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2 = 5$$

∴ B-யின் மாறுவிகிதக் கெழு $= 5$

$$= \frac{5}{68.5} = 0.073$$

∴ A-தான் B-யைவிட நிலைப்புத்தன்மையுடையவர்:

பல்வேறு பரவுகை அளவைகளின் இணை தராதரங்கள்

மையப்போக்கின் அளவையானது சிறந்ததாக அமைய, நாம் கையாண்ட விதிமுறைகளையே, பரவுகை விதிமுறைகளாகக் கொள்ளலாம். அதற்கேற்பப் பல்வேறு பரவுகை அளவைகளின் சீர்களையும் சிறுமைகளையும் காண்போம்.

வீச்சு, ஒரு குத்துமதிப்பான விலக்க அளவையேயாகும். கணக்கியல் ஆய்வுகளுக்கு இது பயன்படாது. புள்ளிவிவரங்கள் முழுவதும் கிடைக்கப்படாத நிலையில் இது பயன்படும். மிகப் பெரிய சிறிய மதிப்புகளால் மட்டும் இது தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இடையில் உள்ள மதிப்புகள் இதனைப் பாதிக்கமாட்டா. ஒரு மாதிரிக் குழுவிற்கும் மற்றொன்றிற்கும் இது மாறும் நிலையுடையது; நிலையற்றது. இதை ஒரு சிறந்த பரவுகை அளவையாகக் கொள்ளமுடியாது.

கால்மான விலக்கமானது, முதல் கால்மானம், மூன்றும் கால்மானம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்தது. அவைகளைக் கணக்கிட வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் சூத்திரங்கள் கிடையாதாகையால் இதற்கும் அத்தகைய சூத்திரம் கிடையாது எனக் கூறுகிறோம். எனினும், பரவுகைத் தன்மையைக் காட்டும் நல்லதோர் அளவையாகும். இதனை எளிதில் கணக்கிடமுடியும். ஓகைவ் வரையிலிருந்தும் இதனை எளிதில் காணலாம். சமச்சீர் தன்மையையும், தட்டை அளவை (Kurtosis)யையும் காண இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. எனினும், கணக்கியல் ஆராய்ச்சி வழிமுறைகளுக்கு இது பயன்படாது. இதனை நிலையானதோர் அளவையாகக் கருதலாம்.

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரமுடையதாகக் கொள்ளலாம். எனினும், இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடும்போது இதனை அவ்வாறு கருத முடியாது; ஏனெனில், இடைநிலை காண அத்தகைய சூத்திரம் கிடையாது. இதைக் கணக்கிடக் கையாளும் வழிமுறைகள் எளிதானவை எனச் சொல்ல

முடியாது. எல்லைப்புற மதிப்புகளால் இது பெரிதும் பாதிக்கப்பட மாட்டாது. திட்டவிலக்கத்தினைப்போல் அவ்வளவு உறுதியான நிலையுள்ளதாகவும் சொல்லமுடியாது. இது பொருளாதாரப் புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. மற்றைய மதிப்புகளி லிருந்து பெரிதும் வேறுபடுகின்ற அம்சங்கள் பல இருக்கின்ற ஒரு பரவலில் இதுவே சிறந்ததொரு பரவுகை அளவையாகும்.

திட்டவிலக்கத்தினைக் காணக் கணக்கியல்படி வரையறுக்கப் பட்ட சிறந்த சூத்திரம் உண்டு; கணக்கிடுதலும் எளிதே. புள்ளியியல் ஆய்வுகளிலும், மாதிரித் தேற்றங்களிலும் இது பெரிதும் பயன் படுகிறது. இது நிலையானது. கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உட்பட்டு நன்கு பயன்படுகிறது. பரவலில் எல்லா அம்சங்களின் அடிப்படையிலும் இது கணிக்கப்படுகிறது. எனவே, எல்லையில் அமைந்துள்ள பெரிய, சிறிய மதிப்புகள் இதனைப் பாதிக்கும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட குழுக்களின் திட்ட விலக்கங்கள் தனித்தனியாகத் தெரியும்போது, அக் குழுக்களால் இணைந்த புதிய குழுவின் திட்டவிலக்கத்தினைக் காண்பது எளிதே. சமச்சீர் தன்மையையும், தட்டைத் தன்மையையும் காண இது பயன் படுகிறது. இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளின் இடையுறவினையும், இடையுறவுக் கோட்டினையும் காண இது பயன்படுகிறது. மையப்போக்கினை அளவிடக் கூட்டுச் சராசரி மிகச் சிறந்த கருவி யாவதுபோல், பரவுகை அளவைகளில் திட்டவிலக்கமே தலை யானதாகும்.

பயிற்சி

1. சிதறல் என்றால் என்ன? அதற்குரிய அளவைகள் யாவை? அவ்வளவைகளின் நடைமுறைப் பயன்கள் யாவை? (செ.ப.)
2. சிதறல் பற்றிக் குறிப்பு வரைக. (செ.ப.)
3. ஒரு சமயத்தில் இங்கிலாந்து நாட்டுப் பார்லிமெண்டின் பிரபுக்கள் சபையில் இருந்தவர்களின் வயதுப்பரவல் வருமாறு:

மையஆண்டுகள் (x)	25	35	45	55	65	75	85
அலைவெண் (f)	3	60	132	153	139	51	2

கால்மானவிலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கங்கள், திட்ட விலக்கம், மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவற்றினைக் கண்டு பிடுக. (செ.ப.)

4. கீழ்க்காணும் பட்டியல் 1 முதல் 10 வரையில் பதிவு எண்களைக்கொண்ட பி.காம். மாணவர்கள் ஒரு தேர்வினில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும்:

பதிவு எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

திட்டவிலக்கத்தினைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

5. கீழ்க்காணும் பட்டியல் ஓர் இராச்சியத்தில் உள்ள 800 தொழிற்சாலைகளில் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 40 பல்வேறு தொழிற்சாலைகளின் செலுத்தப்பட்ட மூலதன அளவுப்பரவலாகும்.

செலுத்தப்பட்ட மூலதனம் (ஆயிரரூபாய்க் கணக்கில்)	1–50	51–100	101–150	151–200
தொழிற்சாலைகளின் எண்ணிக்கை	13	9	0	7
செலுத்தப்பட்ட மூலதனம் (ஆயிரரூபாய்க் கணக்கில்)	201–250	251–300	301–350	
தொழிற்சாலைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	2	

(அ) அந்த இராச்சியத்தில் உள்ள எல்லாத் தொழிற்சாலைகளின் செலுத்தப்பட்ட மூலதன மொத்தத்தைக் காண்க.

(ஆ) 40 தொழிற்சாலைகளின் செலுத்தப்பட்ட மூலதனத்தின் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க. (செ.ப.)

6. ஒரு தேர்வினில் 50 மாணவர்கள் பெறத்தகுந்த மதிப்பெண் 60-ற்குப் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஒரு மாறு:

31	13	20	31	30	45	38	42	30
9	30	30	46	36	2	41	44	18
26	13	44	30	19	5	44	15	7

25	12	30	6	22	24	31	15	6
39	32	21	20	42	31	19	14	23
28	17	53	22	21				

குழுவில் அமையும் அலைவுப்பரவல் ஒன்றை அமைக்க. அவ்வலைவுப்பரவலுக்கு ஒரு செவ்வகப்படம் வரைக. பெற்ற மதிப்பெண்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

7. (அ) வெவ்வேறு சிதறல் அளவைகளின் சிர்களையும் சிறுமைகளையும் விளக்குக.

(ஆ) தனியார் துறையில் பொறியியல் பட்டதாரிகளின் கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் திட்டவிலக்கம் அல்லது கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணக்கிடுக.

வயது வரம்பு	30 வரை	31–35	36–40	41–45	46–50
அலைவெண்	6	13	20	12	5
வயது வரம்பு	51–55	56–60	61–65		
அலைவெண்	3	0	1		

(செ.ப.)

8. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் திட்டவிலக்கம் அல்லது கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காண்க:

வயதுக்குழு:	15–24	25–34	35–44	45–54	55–64
பார்த்த எண்ணிக்கை:	4,000	16,000	28,000	33,000	28,000

(செ.ப.)

9. திட்டவிலக்கமானது மீச்சிறு வர்க்க மூலக்கூட்டுச்சராசரி வர்க்கவிலக்கம் (Root mean square deviation) எனக்காட்டுக.

ரேடியோ செயலாற்றும் ஒரு பொருள் உமிழ்ந்த துகள்களின் எண்ணிக்கைப் பரவல் கீழே தரப்பட்

டுள்ளது. ஏதாவதொரு சிதறல் அளவையினைக் கணக்கிடுக.

உமிழ்ந்த தூகள்களின் எண்ணிக்கை	0–2	3–5	6–8	9–11	12–14
அலைவெண்:	643	1,465	451	86	2

(செ.ப.)

10. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குத் திட்டவிலக்கம் காண்க:

வாராந்திரக் கூலி (ரூபாயில்)	15	20	25	30	35	40	45
கூலியாள்களின் எண்ணிக்கை	3	25	19	16	4	5	6

(செ.ப.)

11. தகுந்த பிரிவின் தூரங்களை எடுத்துக்கொண்டு, கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு முகட்டினையும், முதல், மூன்றும் கால்மானங்களையும் காண்க.

வருமானம் (ரூபாய்)	30-ற்கு கீழ்	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-ம் அதற்கு மேலும்
நபர்கள்	69	167	207	65	58	24	10

(செ.ப.)

12. திட்டவிலக்கம், கால்மான விலக்கம் ஆகியவற்றின் வரையறை இலக்கணங்கள் தருக.

574 தொழிலாளர்களின் கீழ்க்காணும் மாதாந்திர வருமானத்திற்குரிய திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.

ரூபாய்:	35–39	40–44	45–49	50–54
எண்ணிக்கை:	14	60	105	138
ரூபாய்:	55–59	60–64	65–69	70–74
எண்ணிக்கை:	129	85	27	16

(செ.ப.)

13. கீழ்க்காணும் தொடரின் திட்டவிலக்கத்தினைக் காண்க:

....மதிப்பெண் களைவிட மிகுந்த	0	10	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	100	90	75	50	25	15	5	0

(செ.ப.)

14. கீழ்க்காணும் பட்டியல் 100 உற்பத்திக் கூடங்களின் இலாப, நட்ட நிலைகளைத் தருகிறது. இலாபத்தின் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் கணக்கிடுக:

இலாபம் (ரூபாயில்)	உற்பத்திக் கூடங்களின் எண்ணிக்கை
5,000 முதல் 6,000 வரை	8
4,000 முதல் 5,000 வரை	12
3,000 முதல் 4,000 வரை	30
2,000 முதல் 3,000 வரை	10
1,000 முதல் 2,000 வரை	5
0 முதல் 1,000 வரை	5
−1,000 முதல் 0 வரை	6
−2,000 முதல் −1,000 வரை	8
−3,000 முதல் −2,000 வரை	9
−4,000 முதல் −3,000 வரை	7

(செ.ப.)

15. கீழ்க்காணும் 10 அளவைகளுக்குத் திட்டவிலக்கம் காண்க:

18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36

(செ.ப.)

16. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குக் கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக:

அளவு:	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
அலைவெண்:	7	11	19	30	16	13	11

அளவு:	32–36
அலைவெண்:	7

(செ.ப.)

17. (அ) சிதறல் அளவைகளில் சிறந்தது எது?

(ஆ) சிதறலின் ஏற்றதோர் அளவையாக எந்தெந்தத் தருணங்களில் (1) வீச்சு; (2) திட்டவிலக்கம்; (3) மாறுவிகிதக்கெழு ஆகியவற்றினைப் பயன் படுத்துவீர்கள்?

(இ) கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்குக் கால்மான விலக்கம் காண்க:

வாராந் திரக்கூலி:	35-36	36-37	37-38	38-39	40-41	41-42	42-43
கூலி யாள்கள்:	14	20	42	54	45	21	8

(அ.ப.)

18. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு அரை கால்மான வீச்சினைக் (கால்மான விலக்கம்) கணக்கிடுக:

பிரிவு:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
அலை வெண்:	4	1	28	16	7

(ம.ப.)

19. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் திட்டவிலக்கத்தினையும், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக.

பிரிவு (x)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
அலை வெண் (F)	8	12	17	14	9	7	4

(ம.ப.)

20. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்குத் திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக:

வெப்பநிலை 'C'	–40 to –30	–30 to –20	–20 to –10	–10 to 0
நாட்கள்	10	28	30	42

வெப்பநிலை 'C'	0 to 10	10 to 20	20 to 30
நாட்கள்	65	180	10

(சா.அச்.

21. ஒரு தேர்வினில் 100 மாணவாகள் பெற்ற மதிப்பெண் களுக்குத் திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

மதிப் பெண்கள்:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
மாண வர்கள்:	12	21	23	34	10

(ம.ப.)

22. 40, 50 அளவுகளைக்கொண்ட இரு கூறுகள் 53-ஐ ஒரே கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்டுள்ளன. அவைகளின் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 19, 8 ஆகும். 90 அளவாகக்கொண்ட இணைந்த கூறின் திட்டவிலக்கத்தினைக் காண்க. (சா.அக்.)

23. A, B என்ற இரு மாதிரிகளின் அளவைகள் வருமாறு:

மாதிரி	உருவஅளவு (Size)	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	20	44.8	8.3
B	30	47.3	6.5

A-யையும், B-யையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியினையும், திட்டவிலக்கத் தினையும் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

24. X, Y என்ற இரு டாக்டர்கள் ஒரே வயதினையுடைய இருவகைக் குழுவினைச் சார்ந்த மனிதர்களின் சிஸ் டாலிக் இரத்த அழுத்தத்தினைக் கண்டார்கள். அவர்கள் முடிவுகள் வருமாறு:

		மனிதர்களின் எண்ணிக்கை	சிஸ்டாலிக் இரத்த அழுத் தத்தின் கூட்டுச் சராசரி	சிஸ்டாலிக் இரத்த அழுத் தத்தின் திட்ட விலக்கம்
டாக்டர்	X	113	159 எம்.எம்.	22.4 எம்.எம்.
டாக்டர்	Y	121	149 எம்.எம்.	20.0 எம்.எம்.

இருவகைக் குழுக்களும் இணைந்த புதிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்டவிலக்கத்தையும் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

25. 27 இன்னிங் ஆட்டங்களில் பிராட்மென், பான்ஸ் போர்டு ஆகிய இரு புகழ்பெற்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்களின் ஓட்ட எண்ணிக்கை வருமாறு:

பிராட்மென்:

304,	244,	206,	160,	149,	140,	132
94,	80,	62,	53,	48,	45,	42
36,	35,	32,	28,	25,	23,	20
18,	16,	14,	10,	6,	3	

பான்ஸ்போர்டு:

281,	266,	229,	181,	125,	93,	83,	72
64,	58,	52,	48,	46,	41,	36,	27
21,	12,	10,	8,	8,	7,	6,	5
3,	0,	0					

இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களில் மிகையான நிலைப்புத் தன்மையுடையவர் யாவர்? (செ.ப.)

26. ஒரே உற்பத்திச்சாலையில் A, B ஆகிய இரு தொழிற்கூடங்களில் தொழிலாளர்களுக்குத் தரப்பட்ட மாதாந்திர ஊதியத்தின் பகுப்பாய முடிவுகளைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது:

	தொழிற்கூடம் A	தொழிற்கூடம் B
ஊதியம் பெறுவோரின் எண்ணிக்கை	586	648
மாதாந்திரச் சராசரி ஊதியம்	ரூ. 52.5	ரூ. 47.5
ஊதியப் பரவற்படி	100	121

(அ) A, B ஆகிய இவ்விரு கூடங்களில் எக்கூடம் அதிக மாதாந்திர ஊதியத்தினை வழங்குகிறது?

(ஆ) A அல்லது B-யின் எக் கூடத்தில் உற்பத்திச் சாலை ஊதியத்தில் அதிக மாறுபாடு (Variability) காணப்படுகிறது? (செ.ப.)

27. X, Y ஆகிய இரு பங்குகளின் விலைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. மதிப்பினில் எது மிக நிலையான தன்மையையுடையதெனக் கூறுக:

X:	55	54	52	53	56	58	52	51	49
Y:	108	107	105	105	106	107	104	104	101

(செ.ப.)

28. கீழ்க்காணும் தொடருக்கு மாறு விகிதக்கெழுவினைக் காண்க:

வரவு	நபர்களின் எண்ணிக்கை	வரவு	நபர்களின் எண்ணிக்கை
1,000-ற்குமேல்	0	500-க்குமேல்	600
900-ற்குமேல்	50	400-க்குமேல்	700
800-க்குமேல்	100	300-க்குமேல்	850
700-க்குமேல்	200	200-க்குமேல்	900
600-க்குமேல்	400	100-க்குமேல்	1,000

(செ.ப.)

29. ஓர் உற்பத்திக்கூடத்தில் இரு கிளைகளில் தரப்படும் கூலியினைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. இரு கிளைகளுக்கும் தனித்தனியாகக் கூட்டுச் சராசரியினையும், திட்டவிலக்கத்தினையும் காண்க.

(அ) எந்தக் கிளை அதிகக் கூலி வழங்குகிறது?

(ஆ) சராசரிக் கூலியோடு பொருந்திய நிலையில், எந்தக் கிளை அதிக மாறுபாட்டினைக் (Variability) கொண்டது?

கூலி (ரூபாயில்)	கிளை A-யின் வேலையாட்கள்	கிளை B-யின் வேலையாட்கள்
100–150	170	65
150–200	210	95
200–250	256	159
250–300	208	107
300–350	171	84

(செ.ப.)

30. ஓர் ஆண்டில் A, B ஆகிய இரு கம்பெனிகளில் மாதாந்திர இலாபங்களின் கூட்டுச் சராசரிகளும், திட்டவிலக்கங்களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

A		B	
கூட்டுச் சராசரி	= 100	கூட்டுச் சராசரி	= 80
தி. வி.	= 25	தி.வி.	= 15

இலாபங்களின் அடிப்படையில் இவ்விரு கம்பெனிகளின் செயல்திறமையையும் (efficiency), நிலைத் தன்மையையும் (contistency) பற்றி ஆய்வுரை வழங்குக. (அ.ப.)

31. கூட்டுச் சராசரிவிலக்கத்தைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் தொடர்களில் எது மிகவும் மாறுந்தன்மையுடையது எனக்கண்டு ஒப்பிடுக.

A	B	A	B
48,224	2,962	47,624	4,222
39,648	1,348	32,213	6,498
26,249	8,648	72,642	9,981
54,987	5,682	68,349	2,427

(சா.அக்.)

32. கீழே தரப்பட்டுள்ள பட்டியலிலிருந்து, எத்தொடர் மிக மாறுந்தன்மையுடையது எனக் கூறுக.

மாறி	தொடர் A	தொடர் B
10–20	10	18
20–30	18	22
30–40	32	40
40–50	40	32
50–60	22	18
60–70	18	10

(சா.அக்.)

33. 10 ஆய்வுகளின் சராசரியும் திட்டவிலக்கமும் கணக்கிட்ட பின்னர், ஓர் எழுதுதல்பிழைக் காணப்பட்டது. மாதிரி மதிப்புகளை எழுதும்போது, 326 என்பதற்குப் பதிலாக 236 என எழுதப்பட்டுவிட்டது. இத்தவற்றுடன் காணப்பட்ட கூட்டுச் சராசரியும் திட்டவிலக்கமும் முறையே 260.1; 51.6 ஆகும். எனில், சரியான திட்டவிலக்கத்தினைக் காண்க. (செ.ப.)

6. பரவலின் மற்றைய அளவைகள்

ஒரு வெற்றெண் கூட்டத்தின் அல்லது அலைவுப்பரவலின் தன்மையினைக்காண மையப்போக்களவைகளும், விலக்களவை களும் பயன்படுவதாக இதுவரைக் கண்டோம். இவற்றைத் தவிர, புள்ளியியல் மேற்படிப்பு ஆய்விற்கும் புள்ளிவிவரத்தன்மை ஆய் விற்கும் பயன்படுகிற வேறு அளவைகளும் உள. அவைகள் **விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்** (Moments), **கோட்ட அளவைகள்** (Measures of Skewness), **தட்டை அளவை** (Kurtosis), **β, γ கெழுக்கள்** (β, γ, Coefficients) ஆகியனவாம் அவை பற்றி இவ் வத்தியாயத்தில் பார்ப்போம்.

விலக்கப்]பெருக்குத் தொகை

ஒரு பரவலின் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது ....*k*.ஆவது முதலிய விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் புள்ளியியலில் முக்கியப் பங்காற்றுகின்றன. ஓர் அலைவுப்பரவலில் ஏதாவது ஒரு மூலப்புள்ளி *A*-யோடு இணைந்த $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i-A)^k$-யை *k*-ஆவது விலக்கப்பெருக்குத் தொகை அல்லது *k* படி பெருக்குத் தொகை (*k r* moment about *A*) என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு N = மொத்த அலைவெண்; n = மொத்தப் பிரிவுகள். இது μ^1_k என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. $\mu^1_2 = s_2$ என்பது நோக்கத்தக்கது. எனவே, வர்க்கமூலக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்தான், *A*-யோடு இணைந்த இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும். புள்ளியியலில், பல தருணங்களில் $A = \bar{x}$ என எடுத்துக் கொள்வதுண்டு. அப்போது, கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பெறப்படும். கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த *k*-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையினை μ_k எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$(\text{அ-து})\quad \mu_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^k$$

இங்கு $\sigma^2 = \mu_2 = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$ என்பதும்

$\mu = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x}) = o$ என்பதும்

உற்று நோக்கத்தக்கன.

தேற்றம்

ஓர் அலைவுப்பரவலில்

$$\mu_k = \mu^1{}_k - k\,c_1\,\mu^1{}_{k-1}\,d + k\,c_2\,\mu^1{}_{k-2}\,d^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r\,k\,c_r\,\mu^1{}_{k-r}\,d^2 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^k d^k$$

இங்கு $d = \bar{x} - A$

நிறுவனம்

$$\mu_k = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^k$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i \{(x_i - A) - (\bar{x} - A)\}^k$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i \{(x_i - A) - d\}^k$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i \{(x_i - A)\,k - k\,c_1\,(x_i - A)^{k-1} d + k\,c_2\,(x_i - A)^{k-2} d^2 + \ldots + (-1)^r\,k\,c_r\,(x_i - A)^{k-r} d^r + \ldots + (-1)^k d^k\}$$

$$= \mu^1{}_k - k\,c_1\,\mu^1{}_{k-1}\,d + k\,c_2\,\mu^1{}_{k-2}\,d^2 + \ldots + (-1)^r\,k\,c_1\,\mu^1{}_{k-r}\,d^r + \ldots\ldots + (-1)^k d^k.$$

இங்குக் கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த k-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை, A என்ற மூலமதிப்போடு இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளால் கூறப்பட்டுள்ளது.

கிளைத் தேற்றங்கள்

$k = 1$ எனில், $\mu_1 = \mu_1{}^1 - d = 0 \quad \{(\because \mu_1{}^1 = d)\}$

$k = 2$ எனில், $\mu_2 = \mu_2{}^1 - 2\,c_1\,\mu_1{}^1\,d + d^2$

$= \mu_2{}^1 - 2\,d^2 + d^2$

$= \mu_2{}^1 - d^2$

$\{(\text{அ-து})\ \sigma^2 = s^2 - d^2\}$

$k = 3$ எனில், $\mu_3 = \mu_3{}^1 - 3\,c_1\,\mu_2{}^1\,d + 3\,c_2\,\mu_1{}^1\,d^2 - d^3$

$= \mu_3{}^1 - 3\,\mu_2{}^1\,d + 3\,d^3 - d^3$

$= \mu_3{}^1 - 3\,\mu_2{}^1\,d + 2\,d^3$

$k = 4$ எனில், $\mu_4 = \mu_4{}^1 - 4\,c_1\,\mu_3{}^1\,d + 4\,c_2\,\mu_2{}^1\,d^2 - 4\,c_3\,\mu_1{}^1\,d^3 + d^4$

$= \mu_4{}^1 - 4\,\mu_3{}^1\,d + 6\,\mu_2{}^1 - 4\,d^4 + d^4$

$= \mu_4{}^1 - 4\,\mu_3{}^1\,d + 6\,\mu_2{}^1\,d^2 - 3\,d^4$

செப்பர்டின் திருத்தம்

திட்டவிலக்கத்திற்குக் கூறிய காரணத்தின் அடிப்படையிலேயே விலக்கப் பெருக்குத்தொகைக்கும் செப்பர்டின் திருத்தம் மேற்கொள்ளப்படவேண்டும். கூட்டுச் சராசரியில் பிழைகள் ஒன்றுக்கொன்று சரிசெய்து, நிகரில் திருத்தற்கிடமின்றி இருப்பது போல, ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளுக்கும் அதே காரணத்திற்காகத் திருத்தத்திற்கு இடமில்லை. இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளுக்கு மட்டுமே செப்பர்டின் திருத்தம் மேற்கொள்ளப்படவேண்டும். கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையிலிருந்து $\frac{c^2}{12}$-ஐக் கழிக்கவேண்டும். (ஏற்கனவே கூறப்பட்டுள்ளது) கணக்கிடப்பட்ட நான்காவது விலக்கப்பெருக்குத் தொகையிலிருந்து $\left(\frac{c^2\,\mu^2}{2} - \frac{7}{240}\,c^4\right)$-ஐக் கழிக்கவேண்டும்; இங்கு c-பிரிவின் தூரமே.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளை மிகமிகத் துல்லியமாகக் கணக்கிடவேண்டிய தருணங்களில் மட்டும் மேற்கூறப்பட்ட திருத்தங்களை மேற்கொள்ளல் போதுமானதாகும்.

கோட்ட அளவைகள்

சில பரவல்களில், அதன் மையமதிப்புகள் ஒரு பக்கம் மிகையாக விலகி அமைந்துகிடக்கும். அவற்றின் வரைகள் சமச்சீரான நிலையில் அல்லது இயல்நிலையில் அமையா. எத்துணை அளவிற்குச் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைந்துள்ளன எனக் காண்பது அவசியமாகும். சமச்சீரற்ற தன்மை அதன் **கோட்டம்** (Skewness) ஆகும். அதனை அளக்கப் பயன்படுபவை கோட்ட அளவைகள் ஆகும். சமச்சீராக உள்ள பரவலில் இந்த அளவை பூச்சியமாகும். அங்கு, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய

மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்குமென்பது தெளிவாகும். சமச்சீரற்ற பரவல்களில், இடைநிலையும், கூட்டுச் சராசரியும் முகட்டிற்கு ஒரு பக்கத்தில் அல்லது இருமருங்கிலும் விலகி அமைந்து கிடக்கும். எனவே, முகட்டிற்கும் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள தூரம் அல்லது முகட்டிற்கும் இடைநிலைக்குமுள்ள தூரம் கோட்ட அளவையாகப் பயன்படுகிறது. இரு பரவல்களை ஒப்பிடும்போது, அவைகள் வெவ்வேறு மூலஅளவைகளைக் கொண்டிருப்பதால், இவ்வளவைகள் அம்மூல அளவைகளில் சொல்லப்படாது வெற்றெண்ணில் சொல்லப்படல்வேண்டும். எனவே, அத்தகைய அளவைகளை அப் பரவலின் ஏதாவதொரு பரவுகை அளவையால் வகுத்துக்கொள்ளவேண்டும். எனவே,

$$\text{கோட்டஅளவை} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

இது பியர்ஸான் சூத்திரமாகும். இதனையே

$$\frac{3\ (\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

எனவும் கொள்ளலாம். இதனைப் **பியர்ஸான் கோட்டக்கெழு** என அழைக்கின்றோம். வேறொரு கோட்ட அளவையும் உண்டு. அதனைக் **கால்மானக் கோட்டக்கெழு** என அழைக்கின்றோம். அது $\frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$ ஆகும்; இங்கு Q_1 முதல் கால்மானம்; Q_3 மூன்றும் கால்மானம்; M இடைநிலை. இதனைத் தவிர, ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகை எதனையும் கோட்ட அளவையாகப் பயன்படுத்தலாம். $\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ என்பது மூன்றும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையினைப் பயன்படுத்திக் கையாளப் படும் கோட்ட அளவையாகும். இதனை α_3 எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கமாகும். $\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$ என்பதும் கோட்ட அளவையாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்குக் குறிப்பிட்டுள்ள β_1, β_2 பற்றிப் பின்னர் விளக்குவோம்.

தட்டை அளவை

அலைவுப்பரவலின் வரை உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எப்படி அமைகின்றதென அளக்கப்படுகிறது. அதுவும் புள்ளிவிவரத்தின்

தன்மையை எடுத்துக்காட்டும். இதற்குத் **தட்டை அளவை** (Kurtosis) எனப் பெயராகும். $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ என்பது தட்டை அளவையாகப் பயன்படும்.

ஓர் இயல்நிலை அல்லது சமச்சீர் பரவலில் (Normal Distribution) $\alpha_4 = 3$-ஆகக் காணப்பட்டுள்ளது. எனவே, $\alpha_4 < 3$-ஆக அமைந்த வரையை மிகைத்தட்டை (Platykurtic) யுடையதெனவும், $\alpha_4 > 3$-ஆக அமைந்த வரையைக் குறைத்தட்டை (Leptokurtic) யுடையதெனவும் கூறுகிறோம்.

β, γ கெழுக்கள்

வேறு சில கெழுக்களும் அலைவுப்பரவலின் தன்மையைக் காணவும், புள்ளியியலை ஆயவும் பயன்படுகின்றன.

β கெழுக்கள் இருவகை:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} ; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

γ கெழுக்களும் இருவகை:

$$\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1} ; \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் அலைவுப்பரவலில் கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்து 2, 3, 4 -ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளையும், பியர்ஸான் கோட்டக் கெழுவினையும், கால்மானக் கோட்டக்கெழுவினையும் கணக்கிடுக.

மாறி :	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18
அலைவெண்:	4	10	15	8	5

x	f	d	fd	fd^2	fd^3	fd^4	cf
3–6	4	– 2	– 8	16	–32	64	4
6–9	10	– 1	–10	10	–10	10	14 ← Q_1
9–12	15	0	0	0	0	0	29 ← M
12–15	8	1	8	8	8	8	37 ← Q_3
15–18	5	2	10	20	40	80	42
மொத்தம்	42		0	44	6	162	

$$\bar{x} = 10.5 + 0 = 10.5$$

$$M = 9 + \frac{(21 - 14)^3}{15} = 10.4$$

$$Q_1 = 6 + \frac{(10.5 - 4)^3}{10} = 7.95$$

$$Q_3 = 12 + \frac{(31.5 - 29)^3}{8} = 12.94$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{44}{42} - 0 \right\} 3^2 = 9.44$$

$$\mu_3 = \mu_3{}^1 - 3d\,\mu_2{}^1 + 2\,d^3$$

$$= \frac{6}{42} \,.\, 3^3 \quad (\because \quad d = 0)$$

$$= 3.86$$

$$\mu_4 = \mu_4{}^1 - 4d\,\mu_3{}^1 + 6d^2\,\mu_2{}^1 - 3d^4$$

$$= \frac{162}{42} \times 3^4$$

$$= 312.43$$

$$\text{பியர்ஸான் கோட்டக்கெழு} = \frac{3 \ (\text{கூ. சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$= \frac{3\,(10.5 - 10.4)}{\sqrt{9.44}}$$

$$= 0.098.$$

காலமானக் கோட்டக்கெழு

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{12.94 + 7.95 - 20.8}{12.94 - 7.95}$$

$$= 0.02.$$

பயிற்சி

1. கோட்டத்திற்கும் சிதறலுக்குமுள்ள வேறுபாட்டினை விளக்குக. இவ்வளவைகளின் நடைமுறைப் பயன் என்ன? (செ.ப.)

2. மதுரையில் பி.காம் தேர்விற்காகத் தோன்றிய மாண வர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. சொல்லப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்திலிருந்து கார்ல் பியர்ஸானின் கோட்டக்கெழுவினைக் கணக் கிடுக.

மதிப்பெண்கள்:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
மாணவர்கள்:	10	40	20	0	10	40	16	14

(செ.ப.)

3. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கோட்டக்கெழுவினைக் கணக் கிடுக:

மாறி	அலைவெண்
0– 5	2
5–10	5
10–15	7
15–20	13
20–25	21
25–30	16
30–35	8
35–40	3
	75

(செ.ப.)

4. ஒரு பரவலில் பயன்படுத்துகின்ற நிலையில் 'கோட்டம்' என்ற சொல்லை விளக்குக. கீழ்க்கண்டவற்றுக்குக் கோட்டத்தின் ஏதாவதோர் அளவையினைக் கணக் கிடுக;

ஒரு பெட்டியில் தலையில்லாத் தீக் குச்சிகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	12	27	29	19	8	4	1	0

(செ.ப.)

5. 'கோட்டம்' என்றால் என்ன? கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு ஏதாவதொரு கோட்ட அளவையினைக் கணக்கிடுக:

பிரிவுகள் :	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
அலைவெண்:	2	14	24	30	15

(செ.ப.)

6. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குக் கோட்டக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக:

வாராந்திரக்கூலி: (ரூபாயில்)	15	20	25	30	35	40	45
கூலியாட்கள் :	3	25	19	16	4	5	6

(செ.ப.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து கால்மான விலக்கத்தினையும், கோட்டக்கெழுவினையும் காண்க:

அளவு	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36
அலைவெண்	7	11	19	30	16	13	11	7

(செ.ப.)

8. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்குக் கோட்டக்கெழுவினைக் கணக்கிடுக:

உயரம் : (அங்குலத்தில்)	58	59	60	61	62	63	64	65
நபர்கள் :	10	18	30	42	35	28	16	8

(ம.ப.)

9. கீழ்க்காணும் மாதவருமானப் பரவலின் எல்லாவிதக் கோட்டக்கெழுக்களையும் கணக்கிடுக:

மாதவருவாய்: (ரூபாயில்)	100	125	150	175	200	225	250	275	300
அலைவெண் :	2	12	27	31	45	18	6	5	2

10. கீழ்க்காணும் பரவலின் அலைவு வரையை வரைக.

x:	–3	–2	–1	0	1	2	3
y:	1	10	18	12	7	2	0

கூட்டுச் சராசரியையும், அதனோடு இணைந்த இரண்டாவது, நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளையும் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

11. *A, B* என்ற இரு புள்ளிவிவரங்களில்

	A	*B*
இடைநிலே	19.64	24.46
முதல் கால்மானம்	13.46	15.64
மூன்ரும் கால்மானம்	25.94	37.76

A, B ஆகிய இரு குழுக்களின் பரவுகை, கோட்டம் ஆகியவற்றினை ஒப்பிட்டு நோக்குக. (தி.ப.)

12. 1,000 மாணவர்களின் உயரம் (அங்குலத்தில்) ஒரு பரவலில் தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி = 60; கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த 2, 3, 4-வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் முறையே 10, 32, 195 ஆகும். வேண்டிய கெழுக்களேக் கணக்கிட்டு, பரவலின் முக்கிய தன்மைகளே விளக்குக. (செ.ப.)

13. மூலப்புள்ளி (Origin) யோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் முறையே 5, −0.55, −0.43, 68.32. எனில், $\sqrt{\beta_1}$, β_2-யைக் கணக்கிடுக. (செ.ப.)

14. $x=4$ என்பதோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே வருமாறு: 1, 4, 10, 45. எனில், கூட்டுச் சராசரி = 5; மாறுவிகிதம் = 3; $\mu_3 = O$; $\mu_4 = 26$ எனக் காட்டுக. (செ.ப.)

7. வளைகோடு பொருத்தல்

ஒரு பல்கலைக்கழகத்தின் மாணவர்களை ஒரு முழுமைத் தொகுதி (Population) எனக் கூறுகிறோம். அவர்களுள், சில விதிகளின்படி. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட (100 பேர் என்க) மாணவர்க் குழுவினை அம் முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு மாதிரி அல்லது கூறு (A sample) எனக் கூறுகிறோம். மாண வர்களின் பருமனையும், உயரத்தினையும் x, y என இருமாறிகளாகக் கொள்ளலாம். அந்த மாதிரியில் x, y-க்குள்ள உறவு, முழுமைத் தொகுதியில் x, y-க்கு உள்ள உறவாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இது போன்று, மாதிரிகளின்மூலம் முழுமைத்தொகுதியின் தன்மைகளை அறியவும், ஒரு குறிப்பிட்ட x அல்லது y மாறியின் மதிப்பிற்கு இணையான y அல்லது x-ன் மதிப்பினை மதிப்பிடவும் **வளைகோடு பொருத்தல்** (Curve fitting) பயன்படுகிறது. மாதிரியில், x, y-ன், n மதிப்புகள், x, y-களுக்கிடையேயுள்ள ஏற்றதோர் உறவு பொருத்தப்படுகிறது. அவ்வுறவினைச் செப்பும் சமன்பாடு, பொருத்தப்படவேண்டிய வளைகோடாகும். வெவ்வேறு புள்ளி விவரங்களுக்கு வெவ்வேறு வகையான வளைகோடுகள் பொருத்தப் படுகின்றன. எவ்வகைப் புள்ளிவிவரங்களுக்கு எத்தகைய வளைகோடு பொருத்தப்படவேண்டுமென்பதைக் கீழே காணவிருக் கும் எடுத்துக்காட்டுகள் தெள்ளிதின் விளக்கும். பொருத்தப்படும் வளைகோடு ஏற்றதொன்றாக அமையவேண்டும். அதாவது, அவ் வளைகோடு (x, y) புள்ளிகளின் மிகப்பெரும்பாலானவற்றின் வழியாகச் செல்லவேண்டுமென்பது எளிதில் புலனாகும். ஆனால், இவ்வாறு கூறுவது கணக்கியல் தெளிவற்ற கூற்றாகும். கணக்கியல் தெளிவோடு கூடிய கூற்றுகளில் மிக எளிமையானதும் சிறந்தது மான '**குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை**' (Principle of least squares) என்பதை முதலில் விளக்குவோம்.

$(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$ .... $(x_n\ y_n)$ என்பன ஒரு மாதிரியில் கண்ட x, y ஆகியவற்றின் n ஜோடி மதிப்புகள் என்க. $y = f(x)$ என்பது பொருத்தப்படும் வளைகோட்டின் சமன் பாடு என்க. எனில், x_i என்ற மதிப்பிற்கு இணையான நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i என்க; வளைகோட்டின் வாயிலாகக் காணப்

படுவது $f(x_i)$ ஆகும். இரண்டிற்குமுள்ள வேறுபாடு $d_i = y_i - f(x_i)$. இந்த வேறுபாடு f_i-க்கு வளைகோட்டின் விலக்கம் (Residual) எனக்கூறலாம். இவ்விலக்கெண் $d_i \lessgtr 0$-ஆக அமையலாம். எனவே, $d_i^2 = [y_i - f(x_i)]^2$ என்ற விலக்க வர்க்கத்தினை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் Σd_i^2 ஆகும். பொருத்தப்படும் $y = f(x)$ என்ற வளை கோடு ஏறத்தாழ ஏற்றதொரு பொருத்தமானதாக அமைய வேண்டுமெனில், Σd_i^2-ன் மதிப்பு மிகமிகச் சிறியதாயிருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவாகும். இக் கொள்கையைத்தான் **'குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை'** எனக் கூறுகிறோம். இக் கொள்கையே இவ்வத்தியாயத்தின் அச்சாகும்.

இனி, பொருத்தப்படும் பல்வேறு வளைகோட்டுச் சமன் பாடுகளைக் காண்போம்.

நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்தல்

$(x_1\ y_1)$; $(x_2\ y_2)$; $(x_3\ y_3)$; ...... $(x_n\ y_n)$ என்பன நேரில் கண்ட n ஜோடி மதிப்புகளாகட்டும்!

பொருத்தப்படும் நேர்க்கோடு $y = mx + C$ என்க. y-ன் நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i என்க; சமன்பாட்டிலிருந்து கண்ட கணக்கு மதிப்பு $mx_i + C$ ஆகும். எனவே, வேறுபாடு $y_i - (mx_i + C)$ குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி $\Sigma [y_i - (mx_i + C)]^2$ என்பது மிகக் குறைந்த மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டும். அதற்கு $\Sigma [y_i - (mx_i + C)]^2 = f(m_1 c)$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 : \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

(அ-து) $2 \Sigma [y_i - (mx_i + c)] x_i = 0$ —(1)

$2 \Sigma [y_i - (mx_i + c)] = 0$ —(2)

(அ-து) $\Sigma y_i x_i - m \Sigma x_i^2 - c \Sigma x_i = 0$

$\Sigma y_i - m \Sigma x_i - nc = 0$

இவைகளிலிருந்து நாம் பெறும் **'இயல் சமன்பாடுகள்'** (Normal Equations) :

$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy$ —(I)

$m \Sigma x + nc = \Sigma y$ —(II)

இவைகளைத் தீர்வுகண்டு, m, c-யைத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்குப் பொருத்தமான ஒரு நேர்க்கோட்டினைக் காண்க:

x:	0	8	16	24	32
y:	15	18	22	25	30

x	y	X	X^2	Xy
0	15	−2	4	−30
8	18	−1	1	−18
16	22	0	0	0
24	25	1	1	25
32	30	2	4	60
மொத்தம்	110	0	10	37

இயல் சமன்பாடுகள்:

$$10m + 0 = 37 \qquad \text{—I}$$
$$0 + 5c = 110 \qquad \text{—II}$$

தீர்வு கண்டால், $m = 3.7;\ c = 22$

பொருத்தப்படவேண்டிய நேர்க்கோடு :

$$y = 37 \times + 22$$

$$y = 37 \frac{(x - 16)}{8} + 22$$

$$y = 0.46\,x + 14.6$$

பரவளைவைப் பொருத்துதல்

$(x_1\,y_1)$, $(x_2\,y_2)$, $(x_3\,y_3)$ …… $(x_n\,y_n)$ என்பன நேரில் கண்ட n ஜோடி மதிப்புகளாகட்டும்.

$y = ax^2 + bx + c$ என்பது பொருத்தப்பட வேண்டிய பரவளைவு (Parabola) என்க.

எனவே, y-ன் நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i எனில், அதன் கணக்கு மதிப்பு $ax_i^2 + bx_i + c$.

$\therefore$ வேறுபாடு $y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ குறைந்த வர்க்கக் கொள்கைப்படி,

$\Sigma [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$ என்பது மிகக் குறைந்த மதிப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\Sigma [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = f(a, b, c)$ என்க.

எனில்,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 : \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

எனவே,

$$2 \Sigma [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i^2 = 0$$
$$2 \Sigma [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i = 0$$
$$2 \Sigma [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0$$

(அ-து)

$$\Sigma x_i^2 y_i - a \Sigma x_i^4 - b \Sigma x_i^3 - c \Sigma x_i^2 = 0$$
$$\Sigma x_i y_i - a \Sigma x_i^3 - b \Sigma x_i^2 - c \Sigma x_i = 0$$
$$\Sigma y_i - a \Sigma x_i^2 - b \Sigma x_i - nc = 0$$

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள் :

$$a \Sigma x^4 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^2 = \Sigma x^2 y \quad \text{—(1)}$$
$$a \Sigma x^3 + b \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma x y \quad \text{—(2)}$$
$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x + nc = \Sigma y \quad \text{—(3)}$$

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தினை ஓர் இருபடி பரவளையில் பொருத்திக்காட்டுக:

ஆண்டு	1900	1901	1902	1903	1904	
உற்பத்தி அளவு	63	62	52	68	79	
ஆண்டு	1905	1906	1907	1908	1909	1910
உற்பத்தி அளவு	80	85	115	137	141	150

x	y	X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1900	63	−5	−17	25	−125	625	85	−425
1901	62	−4	−18	16	−64	256	72	−288
1902	52	−3	−28	9	−27	81	84	−252
1903	68	−2	−12	4	−8	16	24	−48
1904	79	−1	−1	1	−1	1	1	−1
1905	80	0	0	0	0	0	0	0
1906	85	1	5	1	1	1	5	5
1907	115	2	35	4	8	16	70	140
1908	137	3	57	9	27	81	171	513
1909	141	4	61	16	64	256	244	976
1910	150	5	70	25	125	625	350	1,750
மொத்தம்		0	152	110	0	1,958	1,106	2,370

இயல் சமன்பாடுகள் :

$$1{,}958\,a + 0.b + 110\,c = 2{,}370 \quad \text{—(1)}$$
$$0.a + 110.b + 0.c = 1{,}106 \quad \text{—(2)}$$
$$110.a + 0.b + 11\,c = 152 \quad \text{—(3)}$$

தீர்வுகண்டால்,

$$a = -0.48;\ b = 10;\ c = 99.2$$

∴ பரவளையின் சமன்பாடு :

$$Y = -0.48\,X^2 + 10\,X + 99.2$$
$$(y - 80) = -0.48\,X^2 + 10\,X + 99.2$$
$$y = -0.48\,X^2 + 10\,X + 179.2$$

இலாகிருதம் வழியில் பொருத்தும் வளைகோடுகள்

x, y என்ற மாறிகளின் வெவ்வேறு மதிப்புகளை ஒரு வரை தாளில் அமைத்தால் பெறப்படுவது சிதறல் படமாகும் (Scatter diagram). எக் கோட்டினைப் பொருத்த வேண்டுமென் பதை அச் சிதறல் படம் ஓரளவிற்கு அறிவுறுத்தும். ஆனால், உடலியல், வங்கி, வணிகவியல்களில் சில தருணங்களில் பெறப் படும் புள்ளிவிவரங்களுக்குச் சிதறல் விளக்கப்படங்கள் எளிதாகக் காணமுடியாது. அங்கெல்லாம், ஒரு மாறியின் மதிப்போடு இணைந்த மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகள் மிகப்பெரிய அளவில் மாறுபடும். அத்தருணங்களில் $y = A_e{}^{Bx}$; $y = A_x{}^m$; $y = ab^x$ என்ற வளைகோடுகள் மிகப் பொருத்தமாக அமைகின்றன. இவ் வளைகோடுகளைக் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின்படி அப் படியே பொருத்துதல் இயலாது. எனவே, மாறிகளை மாற்றி அமைத்து, ஒரு நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டிற்குக் கொணர்ந்து, இத்தகு வளைகோடுகளைப் பொருத்தலாம்.

(i) $y = Ae^{Bx}$

இரு பக்கத்திலும் லாக் எடுக்கவும்.

$\log_{10} y = \log_{10} A + Bx \log_{10} e$

(அ-து) $Y = mX + c$

இங்கு $Y = \log y$; $m = B \log e$; $X = x$; $c = \log A$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் A, B-யின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

(ii) $y = Ax^m$

$\therefore \log y = \log A + m \log x$

(அ-து) $Y = mX + c$

இங்கு $Y = \log y$; $X = \log x$; $c = \log A$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் A-யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

(iii) $y = ab^x$

$\therefore \log y = \log a + x \log b$

(அ-து) $Y = mX + c$

இங்கு $Y = \log y$; $m = \log b$; $X = x$; $c = \log a$

m, c-யின் மதிப்புகளை முன்புபோலக் கண்டு, பின்னர் a, b-யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு மிகப் பொருத்தமான $y = Ae^{Bx}$ வடிவ வளைகோட்டினைக் காண்க.

x:	1	2	3	4	5	6	
y:	14	27	40	55	68	300	(செ.ப.)

	X (=x)	y	Y	XY	X^2
	1	14	1.1461	1.1461	1
	2	27	1.4314	2.8628	4
	3	40	1.6021	4.8063	9
	4	55	1.7404	6.9616	16
	5	68	1.8325	9.1625	25
	6	300	2.4771	14.8626	36
மொத்தம்	21		10.2296	39.8019	91

இயல் சமன்பாடுகள் :

$$91\,m + 21\,c = 39.8019 \qquad \text{—(1)}$$
$$21\,m + 6\,c = 10.2296 \qquad \text{—(2)}$$

தீர்வுகண்டால்,

$$m = 0.2285\ ; \quad c = 0.9052.$$

(அ-து) $B \log e = 0.2285$ | $\log A = 0.9052$

$Bx\ 0.4343 = 0.2285$ | $\therefore A = 8.\ 039$

$\therefore\ B = 0.5261$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு $y = 8.039\ e^{0.5261x}$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகையினைக் காட்டும் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு $y = ab^x$ என்ற வடிவ வளைகோட்டினைப் பொருத்துக. பின் 1951ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகையை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	1881	1891	1901	1911	1921	1931	1941
மக்கள் தொகை (மில்லியனில்)	3.9	5.3	7.3	9.6	12.9	17.1	23.2

ஆண்டு x	மக்கள் தொகை y	X	Y	X^2	XY
1881	3.9	−3	0.5911	9	−1.7733
1891	5.3	−2	0.7243	4	−1.4486
1901	7.3	−1	0.8633	1	−0.8633
1911	9.6	0	0.9823	0	0
1921	12.9	1	1.1106	1	1.1106
1931	17.1	2	1.2330	4	2.4660
1941	23.2	3	1.3655	9	4.0965
மொத்தம்		0	6.8701	28	3.5879

இயல் சமன்பாடுகள்:

$$28\,m + 0.b = 3.5879 \qquad —(1)$$
$$0.m + 7\,c = 6.8701 \qquad —(2)$$

தீர்வுகண்டால்,

$$m = 0.1281\ ; \quad c = 0.9814$$
$$m = \log b$$
$$0.1281 = \log b \qquad \therefore\ b = 1.343$$
$$c = \log a$$
$$0.9814 = \log a \qquad \therefore\ a = 9.581$$

$\therefore$ வளைகோடு $Y = (9.581)\ (1.343)^x$

$x = 1951$ எனில், $X = 4,$

$$\therefore\ Y = 0.1281\,X + 0.9814$$
$$= 0.1281\,(4) + 0.9814$$
$$= 1.4938$$

(அ-து) $\log y = 1.4938$

$$\therefore\ y = 81.18.$$

ஒருபக்க இலாகிருதத்தாள்

$y = Ae^{Bx}$ என்ற வளைகோட்டினைப் பொருத்த மாறிகளை ஏற்றமுறையில் மாற்றினால், அது $Y = mX + c$ என்ற வடிவத்தில் அமைகிறது எனக் கண்டோம். இங்கு $Y = \log_{10} y$ ஆகும். எனவே, இக் கோட்டினை வரையச் சாதாரணமான வரைதாள் (graph sheet) பயன்படாது. எனவே, அதற்கென சிறப்பான வரைதாள் வேண்டும். அதில் x-அச்சானது, சாதாரண வரைதாளில் இருப்பதைப் போன்று ஒரேதரமாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும்; y-அச்சு இலாகிருத முறையில் அளவிட்டுப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். y-அச்சினில் 1, 10; 10, 100 100, 1000; என்பன போன்ற இணைந்த எண்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் ஒரே அளவாக அமையும். அத்தகு வரைதாளிற்கு ஒரு பக்க இலாகிருதத்தாள் (Semi-logarithmic paper) எனப் பெயராகும்.

இருபக்க இலாகிருதத்தாள்

$y = ax^m$ என்ற சமன்பாட்டில் மாறிகளை ஏற்றமுறையில் மாற்றியமைக்க $\log y = m \log x + \log a$ எனக்கண்டு, அதன்மூலம் $Y = mX + c$ என்ற நேர்க்கோட்டினைக் கண்டோம். இதனை வரைந்துகாட்டப் பயன்படுவது இருபக்க இலாகிருதத்தாளாகும். இதில் x, y ஆகிய இரண்டு அச்சுகளும் இலாகிருத முறையில் அளவிடப்பட்டுப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். இதனை லாக்லாக்தாள் எனவும் அழைப்பதுண்டு. எனவே, சாதாரண வரிப்படத்தில் $y = ax^m$ என்ற வளைகோடாக அமைவது லாக்லாக் தாளில் $Y = mX + c$ என்ற நேர்க்கோடாக அமைகிறது.

பயிற்சி

1. குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையை விளக்குக.
2. கீழ்க்காணும் தொடருக்குக் 'குறைந்த வர்க்கக்கொள்கை' அடிப்படையில் ஒரு நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	1958–59	1959–60	1960–61	1961–62	1962–63
வரி வருமானம் (இலட்சக் கணக்கான ரூபாயில்)	427	612	521	495	490

(செ.ப.)

3. வேலையில்லாத் திண்டாட்ட நிலையினை விளக்கும் கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கேற்ற ஒரு நேர்க்கோடு காண்க:

ஆண்டு	மொத்தத் தொழில் நிலையில் வேலையற்றவரின் சதவிதம்
1945	2.1
1946	2.2
1947	3.0
1948	5.1
1949	6.4
1950	6.7
1951	7.2
1952	7.9

(செ.ப.)

4. கீழ்க்கண்டது ஒரு விலைப்பட்டியலாகும். அதனை ஓர் இருபடிப் பரவளைவில் பொருத்துக.

ஆண்டு	1875	1876	1877	1878	1879
விலை	88	87	81	78	74

ஆண்டு	1880	1881	1882	1883	1884	1885
விலை	79	85	84	90	92	100

(தி.ப; செ.ப.)

5. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு ஓர் இருபடிப் பரவளைவு பொருத்துக. மேலும், மதிப்புகளின் விலக்கவர்க்கக் கூடுதலையும் காண்க.

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	14	18	23	29	36	40	46

5. கீழ்க்காணும் பட்டியல் ஒருவகைப் பூவிலுள்ள இதழ்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. மிகப் பொருத்தமான $y = ae\ bx$ என்ற வடிவ வளைவு கோட்டினைக் காண்க.

இதழ்களின் எண்ணிக்கை	5	6	7	8	9	10
பூக்களின் எண்ணிக்கை	133	55	23	7	2	2

6. கீழ்க்காணும் பட்டியல் 1922–29 ஆம் ஆண்டுகளில் அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டில் உற்பத்தியான பெட்ரோலியம் அளவினைக் காட்டுகிறது:

ஆண்டு:	1922	1923	1924	1925
உற்பத்தி அளவு (மில்லியன் பவுண்டில்)	557.5	732.4	713.9	763.7

ஆண்டு:	1926	1927	1928	1929
உற்பத்தி அளவு (மில்லியன் பவுண்டில்)	770.9	901.1	901.5	1,007.3

$\log y = a + bx$ என்ற வளைகோட்டினைப் பொருத்துக. 1922–29 ஆம் ஆண்டுகளில் பெட்ரோலியத்தின் உற்பத்திப் பெருக்க வேகத்தினையும் காண்க. (செ.ப.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியல் தரும் ஆண்டுகளில் சுற்றுலாப் பிரயாணிகளுக்குரிய இலாகிருத வரைப்படத்தினை வரைக. உமது கண்ணோட்ட விளக்கத்தினைக் கூறுக.

ஆண்டு	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
சுற்றுலாப் பிரயாணிகள்: (ஆயிரத்தில்)	19.9	25.4	28.1	39.2	43.6	68.9	80.5

(செ.ப.)

8. $y = ae^{bx + cx^2}$ என்ற வளைகோட்டினைக் கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு புள்ளிவிவரத்திற்குப் பொருத்தும் விதத்தினை விளக்குக. எந்தச் சூழ்நிலையில் இது $y = a + bx + cx^2$-யைவிடச் சிறந்தது? (செ.ப.)

9. x, y ஆகியவற்றின் 50 ஜோடி மதிப்புகள் தரப் பட்டுள்ளன. $yx^a = b$ என்ற சமன்பாட்டில் a, b நிலை உறுப்புகள். இதனைப் பொருத்தும் விதத்தினை விளக்குக. (செ.ப.)

8. ஒட்டுறவு

x, y என்ற இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளிடையே உள்ள உறவினையும் அதன் அளவினையும் காண்பது புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படும் பகுதியாகும். உறவுள்ள இவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள உறவு அளக்கப்படவேண்டும். மழை அளவும் பயிர் விளைச்சலும் உறவுள்ள இரு மாறிகளாகும். மனிதர்களின் உயரமும், பருமனும் அத்தகு மாறிகளேயாகும். மாறிகளின் உறவு நேர்மறையாகவும் எதிர்மறையாகவும் இருக்கலாம். மழை அளவும், உற்பத்தி அளவும் நேர்மறை உறவில் அமையலாம். பொருளின் விலையும் விற்பனை அளவும் எதிர்மறையாக அமைய லாம்; விற்பனை அளவு பெருகப்பெருக, பொருள்விலை குறைய லாம்; விலை ஏறஏற விற்பனை குறையலாம்.

அத்தகு இரு x, y மாறிகள் இடையுறவினை அல்லது **ஒட்டுறவை** (Correlation) அளப்பது எங்ஙனம்? அளக்கும் கருவி யாது? $\frac{1}{N} \sum (x-\bar{x})^2$ என்பது x மாறி $\bar{x}$-லிருந்து அமையும் விலகலை அளப்பதென்பதை நாம் முன்னர் கண்டோம். இது போன்றே $\frac{1}{N} \sum (y-\bar{y})^2$ என்பது y மாறி $\bar{y}$-லிருந்து விலகியிருக்கும் தன்மையைக் காட்டும் அளவையாகும். என்வே x, y ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைவிலகலை (Co-variation) அளக்கும் கருவியாக அமைவது $P = \frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$ என்ற பெருக்குச் சுழல் திறனாகும். இந்த இணைவிலகல் திறனையே ஒட்டுறவு அளவை யாகக் கொள்ளலாம். ஆனால், x என்பது ஓர் அலகிலும், y என்பது பிறிதோர் அலகிலும் சொல்லப்பட்டிருக்கலாம். எனவே, இப் பெருக்குச்சுழல் திறன், σx, σy என்ற x, y-ன் திட்டவிலக்கங் களால் வகுக்கப்பெறின், அலகுகளினின்று விடுபட்டு வெற் றெண்ணாக அமையும். எனவே, ஒட்டுறவு அளவுத்திறனாக $r = \frac{1}{N} \cdot \frac{\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma x \sigma y}$ என்பதைக் கொள்ளுகின்றோம். இதற்குப் **பியர்ஸான் பெருக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு** (Pearson's

Product-Moment Coefficient of Correlation) எனப் பெயராகும். x, y களின் உறவுக் கணிக்கையில், $r = o$ வென அமையின், x, y–களுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லையெனவும், $r = +$ ஆக இருப்பின் நேர்மறை உறவெனவும், $r = -$ ஆக அமையின், எதிர் மறையெனவும் தீர்மானிக்கின்றோம். ஆனால், x, y களின் ஒட்டுறவு காணுகையில், x-க்கும் y-க்குமிடையே மெய்யான, பொருளுடைய உறவு உள்ளதா எனத் தீர்மானித்துக்கொள்ள வேண்டும்; இல்லையெனில், பொருளற்ற ஒட்டுறவு (Nonsense Correlation) ஒற்றைப் பெற்றுவிடுவோம்.

ஒட்டுறவுக்குரிய சுருக்கச் சூத்திரம் காணுதல்

$$P = \frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma [\{ (x - A) + (A - \bar{x}) \} \{ (y - B) + (B - \bar{y}) \}]$$

(A, B ஏதாவது இருமதிப்புகள்)

$$= \frac{1}{N} \Sigma (x - A)(y - B) + \frac{1}{N} (B - \bar{y}) \Sigma (x - A) + \frac{1}{N} (A - \bar{x}) \Sigma (y - B) + (A - \bar{x}) (B - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \sum dx\, dy + \frac{1}{N} (B - \bar{y}) \Sigma dx + \frac{1}{N} (A - \bar{x}) \Sigma dy + (A - \bar{x}) (B - \bar{y}) \quad \{ dx = (x - A) ; dy = y - B) \}$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma dx\, dy + (B - \bar{y}) (\bar{x} - A) + (A - \bar{x}) (\bar{y} - B) + (A - \bar{x}) (B - \bar{y}) \left[\begin{array}{l} \because \bar{x} = A + \dfrac{\Sigma dx}{N} \\ \quad \bar{y} = B + \dfrac{\Sigma dy}{N} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma dx\, dy - (\bar{x} - A) (\bar{y} - B)$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma dx\, dy - \frac{\Sigma dx}{N} \cdot \frac{\Sigma dy}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \{ \Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y \}$$

$$\therefore \quad r = \frac{\rho}{\sigma x\, \sigma y} \quad \left\{ \text{இங்கு } \rho = \frac{\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y}{N} \right\}$$

குறிப்பு

ஓர் அலைவுப் பரவலில்

$$\rho = \frac{\Sigma f_{xy} d_x d_y - \frac{\Sigma f_x d_x \Sigma f_y d_y}{N}}{} c_1 c_2$$

இங்கு c_1 = ஒரு பக்கப் பிரிவின் தூரம்
c_2 = மறு பக்கப் பிரிவின் தூரம்
d_x = c_1-ன் மடங்குகள்
d_y = c_2-ன் மடங்குகள்.

எடுத்துக்காட்டு

தந்தை மகன் உயரங்களைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	65	66	67	67	68	69	71	72	73
மகனின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	67	68	64	68	72	70	70	69	70

	x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
	65	67	0	2	0	4	0
	66	68	1	3	1	9	3
	67	64	2	−1	4	1	−2
	67	68	2	3	4	9	6
	68	72	3	7	9	49	21
	69	70	4	5	16	25	20
	71	70	6	5	36	25	30
	72	69	7	4	49	16	28
	73	70	8	4	64	25	40
மொத்தம்	618	618	33	33	183	163	146

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2$$

$$= \frac{183}{9} - \left(\frac{33}{9}\right)^2 = \frac{558}{9^2}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_y}{N}\right)^2$$

$$= \frac{163}{9} - \left(\frac{33}{9}\right)^2 = \frac{378}{9^2}$$

$$\rho = \frac{\Sigma d_x d_y}{N} - \frac{\Sigma d_x}{N}\,\frac{\Sigma d_y}{N}$$

$$= \frac{146}{9} - \frac{33}{9}\,\frac{33}{9} = \frac{225}{9^2}$$

$$r = \frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{225}{\sqrt{558 \times 378}} = 0.49$$

எடுத்துக்காட்டு

x, y-க்குரிய ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

$\downarrow x$ \ $y \rightarrow$	−2.5	−.5	1.5	3.5	5.5
−10	2		7		1
− 4	3	8	9	4	2
2	1	7	17	10	
8		2	2	7	6
14	1	3		1	2
20				3	2

x ↓ \ y →	−2.5 −2	−.5 −1	1.5 0	3.5 1	5.5 2	மொத்தம் fx	fxdx	$fxdx^2$	fxdxdy
−10 −3	6 2 [12]		0 7 [0]		1 [−6]	10	−30	90	6
−4 −2	4 3 [12]	2 8 [16]	0 9 [0]	−2 4 [−8]	−4 2 [−8]	26	−52	104	12
−2 −1	2 1 [2]	1 7 [7]	0 17 [0]	−1 10 [−10]		35	−35	35	−1
8 0		0 2 [0]	0 2 [0]	0 7 [0]	0 6 [0]	17	0	0	0
14 1	−2 1 [−2]	−1 3 [−3]		1 1 [1]	2 2 [4]	7	7	7	0
20 2				2 3 [6]	4 2 [8]	5	10	20	14
மொத்தம் fy	7	20	35	25	13	[100]	−100	256	31
fydy	−14	−20	0	25	26	17			
$fydy^2$	28	20	0	25	52	125			
fxydxdy	24	20	0	−11	−2	31			

$$\sigma_x^2 = \left\{ \frac{\Sigma f_x d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_x d_x}{N} \right)^2 \right\} \times c_1^2$$

$$= \left\{ \frac{256}{100} - \left(\frac{-100}{100} \right)^2 \right\} c_1^2$$

$$= \frac{15{,}600}{100^2} c_1^2$$

$$\sigma_y^2 = \left\{ \frac{\Sigma f_y d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_y d_y}{N} \right)^2 \right\} x\, c_2^2$$

$$= \left\{ \frac{125}{100} - \left(\frac{17}{100} \right)^2 \right\} c_1^2$$

$$= \frac{12{,}211}{100^2} c_2^2$$

$$\rho = \left[\frac{\Sigma f_{xy} d_x d_y}{N} - \frac{\Sigma f_x d_x}{N} \cdot \frac{\Sigma f_y d_y}{N} \right] c_1 c_2$$

$$= \left[\frac{31}{100} - \left(\frac{-100}{100} \right) \left(\frac{17}{100} \right) \right] c_1 c_2$$

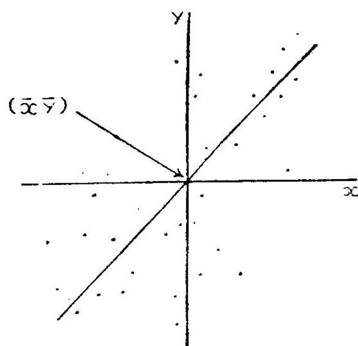
$$= \frac{4800}{100^2} c_1 c_2$$

$$r = \frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{4800}{\sqrt{15{,}600 \times 12{,}211}} = 0.85.$$

சிதறல் விளக்கப் படம்

x, y என்பன ஒன்றுக்கொன்று உறவுள்ள இரு மாறிகள் என்க. அவைகளின் பல்வேறு ஜோடி மதிப்புகளை ஒரு வரை படத்தில் புள்ளிகளாக அமைத்தால் பெறப்படுவது **சிதறல் விளக்கப்படம்** (Scatter diagram) ஆகும்.



படம் 14.

ஒட்டுறவுக் கோடுகள்

சிதறல் விளக்கப்படத்தில் புள்ளிகள் அமைந்த தன்மையினைக்கொண்டு, x, y-களுக்குள்ள உறவினைக் குத்துமதிப்பாகக் கூறலாம். அப் புள்ளிகள் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கோடுகளை ஒட்டி அமைந்துகிடப்பின், x, y-க்குள்ள உறவினை அது தெளிவு படுத்தும்; அன்றி, தான் முழுவதும் விரிந்து பரந்து கிடந்தால் அம்மாறிகளிடையே உறவின்மையைப் புலப்படுத்தும்.

x-ஐத் தனி மாறி (Independent Variable) யாகவும், y-யினைச் சார்ந்த மாறி (Dependent Variable) யாகவும் கொண்டால், பொருத்தக்கூடிய மிகச் சிறந்த ஒருவகை நேர்க்கோட்டினை $y = mx + C$ என்ற வடிவிலும், y-யைத் தனிமாறியாகவும் x-யைச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டால், பொருத்தக்கூடிய மிகச் சிறந்த வேறொருவகை நேர்க்கோட்டினை $x = m' x + C'$ என்ற வடிவிலும் பெறலாம். இக்கோடுகளைச் சுற்றித்தான் புள்ளிகள் அமைந்து கிடக்கும். இத்தகு கோடுகளுக்கு **ஒட்டுறவுக் கோடுகள்** (Regression Lines) எனப் பெயராகும். முன்னதற்கு x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக்கோடெனவும், பின்னதற்கு y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக்கோடெனவும் கூறப்படுகின்றன.

ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

பொருத்தப்படக்கூடிய மிகச் சிறந்த நேர்க்கோடு $y=mx+C$ என்க. எனில், பெறப்படும் இயல் சமன்பாடுகள்

$$m\,\Sigma\,x + x\,c = \Sigma\,y \qquad (1)$$

$$m\,\Sigma\,x^2 + c\,\Sigma\,x = \Sigma\,xy \qquad (2)$$

(1)-ஐ n-ஆல் வகுக்க

$$m\,\bar{x} + c = \bar{y}$$

நாம் கருதும் நேர்க்கோடு $y=m\;x+C$ யாகையால், அந்த ஒட்டுறவுக்கோடு $(\bar{x}\;\bar{y})$ வழியாகச் செல்கிறது என்பதை இது காட்டுகிறது.

மூலப்புள்ளியினை $(\bar{x}\;\bar{y})$-க்கு மாற்ற நாம் பெறுவது

$$C = o$$

$$Y = m\,X \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = x - \bar{x} \\ Y = y - \bar{y} \end{array} \right\}$$

எனவே, (2) ஆவது சமன்பாடு

$$m\,\Sigma\;X^2 = \Sigma\,X\,y$$

$$m = \frac{\Sigma \times y}{\Sigma \times ^2}$$

$$= \frac{\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{P}{\sigma_x{}^2}$$

எனவே, x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு:

$$Y = \frac{\rho}{\sigma\,x^2}$$

(அ-து) $$(y-\bar{y}) = \frac{\rho}{\sigma\,x^2}\;(x-\bar{x})$$

(அ-து) $$(y-\bar{y}) = r\,\frac{\sigma\,v}{\sigma\,x}\;(x-\bar{x})$$

இதுபோன்றே, y-ன்மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு:

$$X = \frac{\rho}{\sigma y^2} Y$$

(அது) $(x - \bar{x}) = \frac{\rho}{\sigma y^2} (y - \bar{y})$

(அ-து) $(x - \bar{x}) = r \frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \bar{y})$

குறிப்பு:

(1) $\frac{\rho}{\sigma x^2}$ என்பது x-ன்மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுக் கெழு எனவும், $\frac{\rho}{\sigma y^2}$ என்பது y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுக்கெழு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

(2) $r^2 = 1$ எனில், இவ்விரு உறவுக் கோடுகளும் ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்துகின்றன. அதாவது, முழுமையான உறவு உள்ளபோது இக் கோடுகள் பொருந்துகின்றன.

(3) x, y-களுக்கிடையே உறவேயில்லையெனில், இக் கோடுகள் இரண்டும் குத்துக்கோடுகளாக அமையும்.

(4) $-1 < r < 1$ ஆக இருக்கும்போது, கோடுகள் இரண்டும் தனித்தனியாக வெவ்வேறாக அமையும்.

(5) இவ்விரு கோடுகளும் $(\bar{X}\ \bar{Y})$-ல் சந்திக்கின்றன.

ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் பயன்கள்

ஒரு மாறியின் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால், மற்றொரு மாறியின் சிறந்த மதிப்பினைத் தீர்மானிக்க இக் கோடுகள் உதவுகின்றன. இவ்வாறு தீர்மானிக்கும்போது, x-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு, அதற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைக்காண x-ன்மேல் y-ன் உறவுக்கோட்டினையும், y கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான x-ன் மதிப்பைக் காண y-ன்மேல் x-ன் உறவுக் கோட்டினையும் பயன்படுத்தவேண்டும். x, y-யும், ஒன்றையொன்று சார்ந்த மாறிகளாக அமைந்த தருணங்களில், இரண்டு கோடுகளையும் ஒரு மாறி மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டு அதன் இணையான மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக்காணப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

தந்தை, மகன் வயதுப் பட்டியலில், மாறிகளின் உறவுக் கோடுகளைக் காண்க.

$$\bar{x} = \frac{618}{9} = 69.7 \; ; \quad \bar{y} = \frac{618}{17} = 69.7$$

$$\frac{\rho}{\sigma \; x^2} \; \frac{225}{558} = 0.4 \; ; \quad \frac{\rho}{\sigma \, y^2} = \frac{225}{378} = 0.6$$

x-ன் மேல் y-ன் உறவுக்கோடு:

$$(y - 69.7) = 0.4 \; (x - 69.7)$$
$$y = 0.4 \, x + 41.82$$

y-ன்மேல் x-ன் உறவுக்கோடு:

$$(x - 69.7) = 0.6 \; (y - 69.7)$$
$$x = 0.6 \, y + 27.88.$$

மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை

x-ன்மேல் y-ன் உறவுக்கோட்டிலிருந்து y-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கிறோம். இந்த y-ன் மதிப்பிற்கும் அதன் மெய்யான மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு d யெனில், $\sqrt{\frac{\Sigma \, d^2}{N}}$ என்பது y மதிப்பீட்டின் **திட்டப்பிழை** (Standard Error) ஆகும். இது y மதிப்பீட்டுப் பிழைகளின் திட்டவிலக்கமாகும். இதனை S_y எனக் குறிக்கின்றோம்.

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma \, d^2}{N}}$$

$$\therefore \quad N \, S_y^2 = \Sigma \, d^2$$
$$= \Sigma \left(Y - r \, \frac{\sigma \, y}{\sigma \, x} \, x \right)^2$$
$$= \Sigma \; Y^2 - 2r \, \frac{\sigma \, y}{\sigma \, \bar{x}} \, \Sigma \times y + r^2 \, \frac{\sigma \, y^2}{\sigma \, x^2} \, \Sigma \times {}^2$$
$$= N \sigma \, y^2 - 2 \, r \, \frac{\sigma \, v}{\sigma \, x} \, Nr.\sigma x \, \sigma y + r^2 \, \frac{\sigma \, y^2}{\sigma x^2} \cdot N \, \sigma \, x^2$$
$$= N \, \sigma_y^2 - 2 \, N \, r^2 \, \sigma_y^2 + N \, r^2 \, \sigma_y^2$$
$$= N \, \sigma_y^2 \; (1 - r^2)$$

$$\therefore \quad S_y^2 = \sigma_y^2 \; (1 - r^2)$$

இதுபோன்ற, $S_x^2 = \sigma_x^2 \; (1 - r^2)$

குறிப்பு:

(i) $(1-r^2) = \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}$

எனவே, $1 - r^2 = +$ எண் அல்லது பூஜ்யம்

(அ-து) $(1-r^2) \geq 0$

$\therefore \; r^2 \leq 1$

$\therefore \; -1 \leq r \leq 1$

(ii) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் திட்டப்பிழை $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ ஆகும்.

தர ஒட்டுறவு

இரு மாறிகளின் மெய்யான மதிப்புகள் பெறப்படாத நிலையில், அம் மாறிகளின் தரமதிப்புகள் (Ranks) பெறப்படலாம். அத் தரங்களிடையே உள்ள உறவு ஓரளவிற்கு அம் மாறிகளின் இடை உறவினை எடுத்துக்காட்டும். இந்தத் **தர ஒட்டுறவைக்** (Rank Correlation) காண, ஒட்டுறவுக்கோடு நேர்கோடாக அமையுமெனும் அனுமானத்தில், பியர்ஸான் பெருக்குச் சுழல் திறன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். எனில், மாறிகளின் தரம், இயல்எண்களாக மாறுகின்றன.

தர ஒட்டுறவுக் கெழு காணச் சூத்திரம்

x: 1 2 3 ... ... n

y: 5 9 8 ... ... n 2

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{n} = \bar{x}^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} \simeq \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

இதுபோன்றே $\sigma_y^2 = \frac{n^2-1}{12}$

$z = x - y$ என்க.

$$\frac{\sum z}{n} = \frac{\sum x}{n} - \frac{\sum y}{n}$$

(அ-து) $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$

$$\therefore \; (z-\bar{z}) = (x-\bar{x}) - (y-\bar{y})$$

$$\therefore \; \sum (z-\bar{z})^2 = \Sigma (x-\bar{x})^2 + \sum (y-\bar{y})^2 - 2\,\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma (z-\bar{z})^2}{n} = \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{n} + \frac{\Sigma (y-\bar{y})^2}{n} - \frac{2\,\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

(அ-து) $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2P$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

இங்கு $z = \bar{x} - \bar{y} = 0$

$$\therefore \quad \sigma z^2 = \frac{\Sigma z^2}{n} = \frac{\Sigma (x-y)^2}{n}$$

$$\therefore \quad r = \frac{\frac{(n^2-1)}{12} + \frac{(n^2-1)}{12} - \frac{\Sigma (x-y)^2}{n}}{2 \cdot \frac{(n^2-1)}{12}}$$

$$= \frac{\frac{n^2-1}{6} - \frac{\Sigma d^2}{n}}{\frac{(n^2-1)}{6}} \qquad (\because \; x - y = d)$$

$$= 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n\,(n^2-1)}$$

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை ρ என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\therefore \quad \rho = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n\,(n^2-1)}$$

குறிப்பு :

மேலே கண்ட $r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$ என்ற சூத்திரமும் r ஐக் கணக்கிடப் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

20 மாணவர்கள் *A, B* ஆகிய இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

A:	90,	47,	68,	57,	76,	61,	30
	44,	82,	58,	49,	65,	63,	69,
	72,	37,	59,	77,	53,	40	
B:	73,	61,	70,	40,	72,	39,	18
	62,	66,	65,	60,	91,	67,	34
	51,	48,	53,	82,	76,	17	

இவைகளின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக. (சே.ப.)

தரநிலை:

A: 1, 16, 7, 13, 4, 10, 20,
17, 2, 12, 15, 8, 9, 6,
5, 19, 11, 3, 14, 15

B: 4, 11, 6, 16, 5, 17, 19,
10, 8, 9, 12, 1, 7, 18,
14, 15, 13, 2, 3, 20

d: 3, 5, 1, 3, 1, 7, 1, 7, 6, 3, 3, 7, 2, 8,
9, 4, 2, 1, 11, 5

d^2: 9, 25, 1, 9, 1, 49, 1, 49, 36, 9, 9,
49, 4, 64, 81, 16, 4, 1, 121, 25

$$\sum d^2 = 563$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 563}{20 \times 399}$$

$$= \frac{4{,}602}{7{,}980} = 0{\cdot}58$$

தர எண்கள் காண்பதில் சிக்கல் நிலை

தர எண்களைத் தீர்மானிப்பதில் சில தருணங்களில் சிக்கல் ஏற்படும். எடுத்துக்காட்டாக, இருநபர்கள் அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நபர்கள் ஒரே மதிப்பெண்களைப் பெறலாம். அப்போது தரஎண்களை எங்ஙனம் தீர்மானிப்பது? மதிப்புகளில் இறங்கு வரிசையில் தரஎண்களைத் தீர்மானிக்கும்போது, காட்டாக, 6ஆவது நபரும் 7ஆவது நபரும் ஒரே தரஎண்ணைப் பெறுகிறார் எனக் கொள்வோம். அந் நிலையில் 6ஆவது நபருக்குத் தரஎண் 6.5 எனவும், 7ஆவது நபருக்குத் தரஎண் 6.5 எனவும், 8ஆவது நபருக்குத் தரஎண் 8 எனவும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இங்குத் தரஎண் 7 என எழுதப்படமாட்டாது.

எடுத்துக்காட்டு

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது:

x:	80,	88,	95,	90,	88,	92,	100
y:	100,	100,	105,	109,	125,	110,	120

இதற்குரிய தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

தரநிலை :

x:	7	5.5	2	4	5.5	3	1
y:	6.5	6.5	5	4	1	3	2
d:	1.5	1	3	0	4.5	0	1
d^2:	2.25	1	9	0	20.25	0	1

$$\Sigma d^2 = 33.50$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 33.50}{7(49-1)}$$

$$= 0.4$$

பயிற்சி

1. ஒட்டுறவு என்றால் என்ன? அதன் முக்கியத்துவம் யாது? இரு தொடர்களுக்கு ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

x: 12, 13, 15, 14, 13, 13, 15

y: 4.5, 4, 1.5, 3.5, 4, 4, 2.5

(செ.ப.)

2. கீழ்க்காணும் பட்டியல் கணவன், மனைவியின் வயதினைக் காட்டுகிறது:

x: 22, 24, 26, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37

y: 18, 20, 20, 24, 22, 27, 21, 29, 27, 27, 27, 31, 30, 32

பியர்ஸான் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

(அ.ப.)

3. கீழ்க்காணும் பட்டியல், கோதுமை, உருளைக்கிழங்கு ஆகிய உணவுப் பொருள்கள் 15 மாவட்டங்களில் விளைந்த நிலையைக் காட்டுகிறது:

கோதுமை 16, 20, 17, 16, 15, 18, 14, 12, 13, 14, 15, 11, 10, 12

உருளைக் கிழங்கு 5, 6, 6, 8, 6, 6, 5, 7, 4, 6, 7, 4, 6, 3, 6

இவ் விளைச்சலுக்கிடையே உள்ள உறவுக்கெழுவினைக் கணக்கிடுக. கோதுமையின் விளைவு 33 எனில், உருளைக்கிழங்கின் உற்பத்தியினை மதிப்பிடுக. (அ.ப.)

4. 7 ஆண்டுகளில் வேலைநிறுத்தம், கதவடைப்பு ஆகியவற்றிற்கும் வங்கிச் சேமிப்புநிதிக்கும், கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக்கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

சேமிப்பு வங்கி நிதி (இலட்சக்கணக்கான ருபாயில்)	51	54	55	59	65	60	70
வேலைநிறுத்தமும் கதவடைப்பும்	38	44	33	36	33	23	10

(செ.ப.)

5. ஒட்டுறவுக் கெழு என்பதன் பொருளை விளக்குக. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து, எண்ணெய், மின்சார உற்பத்திகள் ஒட்டுறவுடையன என்று சொல்லத் தக்கதை ஆய்க.

எண்ணெய் உற்பத்தி	6.9	8.2	7.8	4.8	9.6	8.0	7.7
மின் உற்பத்தி	1.9	3.5	6.5	1.3	5.5	3.5	2.2

(செ.ப.)

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்திலிருந்து உற்பத்திக்கும், வேலையற்றோர் எண்ணிக்கைக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக:

ஆண்டு	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
தொழிற்கூட உற்பத்திக் குறியீட்டு எண்	100	102	104	107	105	112	103	94
வேலையற்றோர் எண்ணிக்கை (இலட்சக் கணக்கில்)	113	124	140	111	123	122	161	264

(செ.ப.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து குழந்தை இறப்புவிதத்திற்கும் மக்கள்தொகை நெருக்கடிக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

குழந்தைகளின் இறப்புவீதம்	109 122 96 142 151 124 125 102 109 156 120
மக்கள்தொகை நெருக்கடிச் சதவீதம்	14.9 6.3 5.8 12.2 33.2 13.3 14.6 8.8 4.9 39.8 6.3

(செ.ப.)

8. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து தந்தை, மகன் வயதிற்குள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

தந்தை உயரம் (அங்குலத்தில்)	65	66	67	67	68	69	70	72
மகன் உயரம் (அங்குலத்தில்)	67	68	65	68	72	72	69	71

(செ.ப.)

9. கீழ்க்காணும் x, y-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

x:	78	89	97	69	59	79	68	61
y:	125	137	156	112	107	136	123	108

(செ.ப.)

10. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து, x, y-க்குள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

x:	10	14	15	28	35	48
y:	74	61	50	54	43	36

(செ.ப.)

11. 1969ஆம் ஆண்டில் முதல் ஆறு மாதங்களுக்குத் தரப்பட்ட கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து ஏற்றுமதி இறக்குமதிக்குள்ள ஒட்டுறவுக்கெழுவினைக் காண்க.

ஏற்றுமதி (கோடிரூபாயில்)	116	102	117	126	110	114
இறக்குமதி (கோடிரூபாயில்)	142	133	134	118	124	111

(செ.ப.)

12. விலைக்கும் விற்பனைக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

விலை (ரூபாயில்)	100	90	85	92	90	84	88	90
விற்பனை (மூல அளவையில்)	500	610	700	630	670	800	800	750

(செ.ப.)

13. ஒட்டுறவு என்றால் என்ன? ஒட்டுறவினைத் தீர்மானிக்கக் கீழ்க்காணும் வழிமுறைகளை எவ்வாறு பயன்படுத்துவீர்கள் என்பதை விளக்குக.

(அ) வரிப்படம்

(ஆ) ஒட்டுறவுப் பட்டியல்

(இ) கார்ல் பியர்ஸான் ஒட்டுறவுக் கெழு (செ.ப.)

14. ஒரு குழுவினைச் சார்ந்த தந்தை, மகன்களின் உயரங்கள் (செ.மீ-ல்) கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

தந்தையின் உயரம்	158	160	163	165	167	170	167	172	177	181
மகனின் உயரம்	163	158	167	170	160	180	170	175	172	175

ஒட்டுறவுக் கோடுகளைக் காண்க. தந்தையின் உயரம் 164 செ.மீ. உள்ள நிலையில், மகனின் உயரத்தை மதிப்பீடு செய்க. (செ.ப.)

15. ஒரு கம்பெனிக் காரின் வயதையும், ஆண்டுப் பராமரிப்புச் செலவையும் காட்டுகின்ற கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து வயதோடு பொருந்திய பராமரிப்புச் செலவிற்கு ஒட்டுறவுக் கோட்டினைக் காண்க.

காரின் வயது (ஆண்டுகளில்)	2	4	6	7	8	10	12
ஆண்டுப் பராமரிப்புச் செலவு (ரூபாயில்)	1,600	1,500	1,800	1,900	1,700	2,100	2,000

(செ.ப.)

16. ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கும் ஒட்டுறவுக் கோட்டிற்குமுள்ள வேறுபாட்டினைச் சுட்டிக்காட்டுக.

ஓர் இன்ஷ்யூரன்ஸ் கம்பெனியின் கழிந்த விகிதத்திற்கும் (Lapse ratio), செலவு விகிதத்திற்கும் (Expense ratio) உள்ள கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

கழிந்த விகிதம்	11.9	9.7	12.0	5.7	12.5	13.0	9.6
செலவு விகிதம்	31.8	28.8	33.9	24.7	34.2	30.6	28.2

(செ.ப.)

(17) கீழ்க்காணும் பட்டியல் 1,000 மனிதர்களின் உயரம், பருமனைக் காட்டும் இருவழி அலைவுப் பரவலாகும்.

பருமன் (பவுண்டில்)

உயரம் (அங்குலத்தில்)	85–100	100–	115–	130–	145–	160–	175–	190–205
60–62	3	9	1					
62–	9	32	40	20	8	1		
64–	7	39	95	51	31	4		
66–	2	25	104	110	60	8	2	
68–	1	4	42	71	49	40	5	2
70–		1	5	11	32	35	4	
72–			1	1	5	19	3	2
74–76				1		2	2	1

உயரத்திற்கும் பருமனுக்குமுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

(18) கீழ்க்காணும் பட்டியல் காட்டும் x, y-ன் உறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

$x \backslash y$	41–45	36–40	31–35	26–30	21–25
1–5				9	15
6–10			10	11	
11–15		7	9	4	
16–20		13	5		
21–25	14	3			

(செ.ப.)

19. ஒரு பொதுஅறிவுத் தேர்வினில் 65 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள், வெவ்வேறு வயதுக் குழுவிற் கேற்ப அலைவெண்களைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. வயதிற்கும் பொதுஅறிவிற்குமுள்ள ஒட்டுறவு நிலையை அளக்கவும்.

தேர்வு மதிப்பெண்கள்	வயது ஆண்டுகளில்			
	19	20	21	22
200–250	4	4	2	1
250–300	3	5	4	2
300–350	2	6	8	5
350–400	1	4	6	8

(செ.ப.)

20. ஓர் அழகுப் போட்டியில் 15 நங்கைகளுக்கு A, B என்ற இரு நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்பெண்கள் பின் தரப்

பட்டுள்ளன. இரு நீதிபதிகளும் பொதுவான அழகுக் கண்ணோட்டமுடையவர்களா என்பதை ஆய்க.

A:	36,	42,	35,	29,	45,	53,	48,	40,
	35,	37,	44,	53,	62,	41,	25	
B:	68,	59,	46,	84,	48,	59,	60,	45,
	54,	53,	58,	80,	75,	64,	70	

21. 10 மாணவர்கள் *A, B* ஆகிய இரு பாடங்களில் பெற்ற தர எண்கள் வருமாறு:

A:	1,	6,	5,	10,	3,	2,	4,	9,	7,	8
B:	6,	4,	9,	8,	1,	2,	3,	10,	5,	7

இவற்றின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

9. இடைச்செருகல்

கைக்குக் கிடைத்த தொடர்ச்சியான ஒரு புள்ளிவிவரத்தில், இடையில் உள்ள ஓர் எண்ணையோ, முன்னால் அல்லது பின்னா லுள்ள எண்ணையோ மதிப்பிடவேண்டியிருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, நம் நாட்டின் மக்கள்தொகை *1901, 1911, 1921, 1931, 1941, 1951, 1961, 1971* ஆகிய ஆண்டுகளில் கணிக்கப் பட்ட நிலையில் கைவசமுள்ளதாகக் கருதுவோம். எனில், *1939*-ஆம் ஆண்டில் மக்கள்தொகை என்ன என மதிப்பிட வேண்டியிருக்கும். அப் புள்ளிவிவரத் தொடரில் இம் மதிப்பீட் டெண்ணைச் செருகவேண்டும். இம் முறைக்கு **இடைச்செருகல்** (Interpolation) எனப் பெயராகும். இதுபோன்றே, *1891, 1981*-ஆம் ஆண்டு மக்கள்தொகையினை மதிப்பிடவேண்டியிருக் கும். அம் முறைக்கு, **வெளிச்செருகல்** (Extrapolation) எனப் பெயராகும். ஒரு மாறியின் மதிப்பினை இடைச்செருகல் முறை யால் மதிப்பிடும்போது, சில அடிப்படையான நிலைகளை நாம் அனுமானித்துக்கொள்கிறோம். அவையாவன:

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத் தொடரில், மதிப்புகள் ஒரு நிலையிலிருந்து அடுத்த நிலைக்குத் திடீரென மிகையாக ஏறுவதோ இறங்குவதோ இல்லை.

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் மாறுபடுகின்ற மாறி யின் மதிப்புகள் ஒரே சீராக (uniform) ஏறுகின்றன அல்லது இறங்குகின்றன.

இங்கு இடைச்செருகல் முறைகள் சிலவற்றைக் காண்போம். இங்குச் 'செருகல்' என நாம் குறிப்பிடுவது இடைச்செருகலை யாகும்.

நேர்கோட்டுச் செருகல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரங்களுக்கேற்ற மிகச் சிறந்த நேர்கோட்டினைப் பொருத்துகிறோம். பின், கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு இணையான y-ன் மதிப்பை, அந் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து மதிப்பிடுகிறோம். இருஜோடி மதிப்புகள்

மட்டும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலையில், இம் முறை மிகப் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு

காலியான இடத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

x	y
16	4 45
17	...
18	4.64

$$\frac{x-16}{18-16} = \frac{y-4.45}{4.64-4.45}$$

(அ-து) $0.19x - 2y + 5.86 = 0$

$x = 17$ எனில், $3.23 - 2y + 5.86 = 0$

$$\therefore \quad y = 4.545$$

எனவே, $x = 17$ என்பதற்கு இணையான y-ன் மதிப்பு 4.545 ஆகும்.

பரவளைச் செருகல்

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட ஜோடி மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடங்களில், பொருத்தமான முறையில் இருபடி அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட படி பரவளையைப் பொருத்தலாம். n ஜோடி மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால், $(n-1)$ படி பரவளையைப் பொருத்தவேண்டுமெனக் கூறலாம். அதாவது, பொருத்தப்படவேண்டிய பரவளை $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$. பின் $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

வாழ்க்கைக் குறியீட்டு எண் பட்டியல் வருமாறு: ஏற்ற தொரு பரவளையைப் பொருத்தி, 1950ஆம் ஆண்டிற்கான குறியீட்டு எண்ணை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு	1948	1949	1951	1952
குறியீட்டு எண்	100	107	157	212

(செ.ப.)

x:	-2	-1	0	1	2
y:	100	107	?	157	212

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$100 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \quad (1)$$
$$107 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \quad (2)$$
$$157 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \quad (3)$$
$$212 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \quad (4)$$

(1) + (4)
$$312 = 2a_0 + 8a_2$$
(அ-து) $$156 = a_0 + 4a_2 \quad (5)$$

(2) + (3)
$$264 = 2a_0 + 2a_2$$
$$132 = a_0 + a_2 \quad (6)$$

(5) − (6)
$$24 = 3a_2$$
$$\therefore a_2 = 8$$
$$a_0 = 124$$
$$107 = 124 - a_1 + 8 - a_3$$
$$\therefore a_1 + a_3 = 25 \quad (7)$$
$$100 = 124 - 2a_1 + 32 - 8a_3$$
$$\therefore 2a_1 + 8a_3 = 56$$
(அ-து) $$a_1 + 4a_3 = 28 \quad (8)$$

(8) − (7)
$$3a_3 = 3$$
$$\therefore a_3 = 1$$
$$a_1 = 24$$
$$\therefore y = 124 + 24x + 8x^2 + x^3$$
$x = 0$ எனில், $y = 124$.

வேறுபாட்டுவழிச் செருகல்

x, y – இரு மாறிகளின் மதிப்புகளில், ஒரு மாறியின் வரிசை மதிப்புகள் ஒரு கூட்டுத்தொடரில் அமையும்போது இம் முறை பயன்படுகிறது.

$(x_0\ y_0), (x_1\ y_1), (x_2\ y_2), \ldots\ldots (x_n\ y_n)$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள $(x,\ y)$ மாறிகளின் மதிப்புகள் என்க. மேலும் $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் என்க. அதில்

அதிகரிப்பு எண் அல்லது பொது வித்தியாசம் (Common difference) h என்க.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{என்க.}$$

$$\therefore \quad \Delta^2 y_0 = \Delta (\Delta y_0)$$
$$= \Delta (y_1 - y_0)$$
$$= \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2 y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta (\Delta^2 y_0)$$
$$= \Delta (y_2 - 2 y_1 + y_0)$$
$$= \Delta y_2 - 2 \Delta y_1 + \Delta y_0$$
$$= (y_3 - y_2) - 2 (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)$$
$$= y_3 - 3 y_2 + 3 y_1 - y_0$$

$$\Delta^4 y_0 = \Delta (\Delta^3 y_0)$$
$$= \Delta (y_3 - 3 y_2 + 3 y_1 - y_0)$$
$$= \Delta y_3 - 3 \Delta y_2 + 3 \Delta y_1 - 3 \Delta y_0$$
$$= (y_4 - y_3) - 3(y_3 - y_2) + 3(y_2 - y_1) - 3(y_1 - y_0)$$
$$= y_4 - 4 y_3 + 6 y_2 - 4 y_1 + y_0$$

இது போன்றே,

$$\Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots + (-1)^n y_n.$$

$(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ … … $(x_n y_n)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தப்படவேண்டிய வளைகோடு,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ என்க.}$$

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n.$$

$$y_1 = a_0 + a_1 (x_0 + h) + a_2 (x_0 + h)^2 + \ldots \ldots \ldots + a_n (x_0 + h)^n.$$

$$y_2 - y_0 = a_1 h + a_2 (2 h x_0 + h^2) + \ldots \ldots \ldots + a_n \left[n x_0^{n-1} h + \frac{n (x-1)^{n-2}}{1\cdot 2} x_0 h^2 + \ldots \ldots + h^n \right]$$

எனவே, y_0 என்பது n படியானுல்

$\Delta\, y_0$ ஆவது $(n-1)$ படியாகும்

$\therefore$ $\Delta^2 y_0$ என்பது $(n-2)$ படியாகும்

$\Delta^3 y_0$ என்பது $(n-3)$ படியாகும்.

இது போன்றே $\Delta^n y_0$ என்பது $(n-n) = 0$ படியாகும்.

அதாவது $\Delta^n y_0$ என்பது ஓரே நிலை உறுப்பாக அமையும்.

$$\therefore \quad \Delta^{n+1} y_0 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{c} n+1 \text{ மதிப்புகள் கொடுக்கப்} \\ \text{பட்டுள்ளதை நோக்குக} \end{array} \right\}$$

(அ-து) $$y_{n+1} - (n+1)\, y_n + \frac{(n+1)\, n}{1\cdot 2}\, y_{n-1} - \frac{(n+1)\, n\, (n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\, y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n+1}\, y_{n+1} = 0$$

இதனைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள x மதிப்பிற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்கண்ட $f(x)$-ன் மதிப்புகளிலிருந்து, $f(6)$ ஐ மதிப்பிடுக.

$$\begin{aligned} f(4) &= 0.7326008 \\ f(5) &= 0.5952380 \\ f(7) &= 0.4084968 \\ f(8) &= 0.3439971 \\ f(9) &= 0.2923978 \\ f(10) &= 0.2506265 \end{aligned}$$

(செ.ப.)

x:	4	5	6	7	8	9	10
y:	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$

x-ன் 6 மதிப்புகளுக்கு இணையான, y-ன் 6 மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

எனவே, $\Delta^6 y_0 = 0$

(அ-து) $$y_6 - 6\, y_5 + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\, y_4 - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\, y_3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\, y_2 - \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\, y_1 + y_0 = 0$$

(அ-து) $$\mathbf{0.2506265 - 6\,(0.2923978) + 15\,(0.3439971) - 20\,(0.4084968) + 15\, y_2 - 6\,(0.5952380) + 0.7326008 = 0}$$

$$\therefore \quad y_2 = 0.4901711.$$

நியூட்டன் இடைச்செருகல்

இம் முறையிலும் x-ன் மதிப்புகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரில் அமைந்திருக்கவேண்டும். $(x_n\ y_n)\ n = 0, 1, 2, \ldots n$ என்ற மதிப்புகள் $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உட்பட்டவை என்க.

கூட்டுத்தொடரின் அதிகரிப்பு எண் h என்க.

$$\therefore \quad x_1 = x_0 + h;\ x_2 = x_0 + 2h, \ldots \ldots, x_n = x_0 + nh$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$\Delta y_0 = \Delta f(x_0) = y_1 - y_0$$

$$= f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\therefore \quad f(x_0 + h) = (1 + \Delta) f(x_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\therefore \quad y_2 = 2y_1 - y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$= 2f(x_0 + h) - f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$

$$= 2(1 + \Delta) f(x_0) - f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$

$$= (1 + 2\Delta + \Delta^2) f(x_0)$$

$$= (1 + \Delta)^2 f(x_0)$$

(அ-து) $f(x_0 + 2h) = (1 + \Delta)^2 f(x_0)$

இதுபோன்றே $f(x_0 + nh) = (1 + \Delta)^n f(x_0)$

$$= f(x_0) + n\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(x_0) + \ldots \ldots + \Delta^n f(x_0)$$

(அ-து) $y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0$

இதுவே நியூட்டன் இடைச்செருகல் சூத்திரமாகும். n-ன் எல்லா நேர்மறை மதிப்புகளுக்கும் (பின்னமாயினும்) இது பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு

நியூட்டன் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் பட்டியலில் 25 வயதிற்குள்ள பருவக் கட்டணத்தைக் கணக்கிடுக.

வயது	20	24	28	32
பருவக் கட்டணம்	0.01427	0.01581	0.01772	0.01996 (செ.ப.)

x:	1	2	3	4
y:	0.01427	0.01581	0.01772	0.01996

$x = 1.25$ எனில் $y = ?$

y	Δ	Δ^2	Δ^3
0.01427			
	.00154		
0.01581		.00037	
	.00191		$-$ .00004
0.01772		.00033	
	.00224		
0.01996			

$$y_{\frac{5}{4}} = y_0 + \tfrac{5}{4}\,\Delta y_0 + \frac{\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}-1\right)}{1.2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}-1\right)\left(\frac{5}{4}-2\right)}{1.2.3}\,\Delta^3 y_0$$

$$= 0.01427 + \tfrac{5}{4}\,(.00154) + \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\,(.00037) + 0$$

$$= 0.016255.$$

எனவே 25 வயதிற்குள்ள பருவக்கட்டணம் 0.016255.

லக்ராஞ்சி இடைச் செருகல்

$$y = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x-x_n)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\,(x_0-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x_0-x_n)}\,y_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x-x_n)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x_1-x_n)}\,y_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x-x_n)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)\;\ldots\ldots\ldots\;(x_2-x_n)}\,y_2$$

$$+ \;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots$$

$$+ \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\;\ldots\ldots\ldots\;(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\,(x_n-x_1)\,(x_n-x_2)\;\ldots\ldots\;(x_n-x_{n-1})}\,y_n$$

இந்த உறவு $(x_0\ y_0)$; $(x_1\ y_1)$; $(x_2\ y_2)$ ……… $(x_{n_1}\ y_n)$ ஆகிய எல்லா மதிப்புகளையும் திருப்திப்படுத்தும்.

எனவே, இது இந்த $(n+1)$ புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைகோடாகும். இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து கொடுக்கப் பட்டுள்ள எந்தவொரு x-ன் மதிப்பிற்கும் இணையான y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். இங்கு x-ன் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடரில் அமைய வேண்டுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு

x, y-ன் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. $x = 6$-எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	5	9	11	14
y:	168	130	100	85

லக்ராஞ்சி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$y = \frac{(6-9)(6-11)(6-14)}{(5-9)(5-11)(5-14)} 168 + \frac{(6-5)(6-11)(6-14)}{(9-5)(9-11)(9-14)} 130 +$$

$$\frac{(6-5)(6-9)(6-14)}{(11-5)(11-9)(11-14)} 100 + \frac{(6-5)(6-9)(6-11)}{(14-5)(14-9)(14-11)} . 85$$

$$= 149.$$

எனவே $x = 6$-எனில் அதன் இணையான $y = 149$.

பயிற்சி

1. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் காலியிடத்தைப் பூர்த்தி செய்க:

?	பரப்பு
1.3	0.4032
1.4	......
1.5	0.4332

2. நீள்வட்டச் சார்பு S_n x-ன் மதிப்புத் தரப்பட்டுள்ளது. S_n (0.3)-ன் மதிப்பினை இடைச்செருகல் வழியில் காண்க.

x	$S_n(x)$
0.0	0.00000
0.1	0.09980
0.2	0.19841
0.4	0.38752
0.5	0.47595
0.6	0.55912

(செ.ப.)

3. காலி இடத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

x:	25	30	35	40	45
y:	23	26	...	35	42

4.

$\frac{x}{\sigma}$:	1.4	1.5	1.6	1.7
P:	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554

$\frac{x}{\sigma} = 1.54$ எனில், P-ன் மதிப்பினைக் காண்க;

$P = 0.93$-எனில் $\frac{x}{\sigma}$-வின் மதிப்பினைக் காண்க.

5. இடைச்செருகல் என்றால் என்ன? ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் எடுக்கப்பட்ட வெப்பநிலை அளவுகளைக் கீழ்க் காணும் பட்டியல் தருகிறது. 3 மு.ப., 5 மு.ப ஆகிய நேரங்களில் உள்ள வெப்பநிலையை மதிப்பீடு செய்க.

நேரம்	2 மு.ப.	6 மு.ப.	10 மு.ப.	2 ப.
வெப்ப நிலை(0°C)	40.2	42.4	51.0	72.4

(செ.ப.)

6. ஒருவித நோயினால் ஒரு வட்டத்தில் எத்தனைபேர் இறந்தனர் என்ற வீதத்தினைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது:

ஆண்டு	1956	1958	1960
இறப்புவீதம்	160	175	180

1949ஆம் ஆண்டில் இறப்புவீதத்தை இயல் கணித வழியில் காண்க. (செ.ப.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து 45 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைந்து பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
30–40	31
40–50	42
50–60	51
60–70	55
70–80	31

(செ.ப.)

8. முடிந்த வயதினில் செலுத்தத்தக்க பிரிமியத்தைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. 35 வயது முடிந்த ஒருவர் செலுத்தவேண்டிய பிரிமியத்தை இடைச் செருகல் முறையில் காண்க.

முடிந்த வயது	25	30	40	50
பிரிமியம் (ரூபாயில்)	50	55	70	95

(செ.ப.)

9. x, $f(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தரப்பட்டன. $x = 27$ எனில் $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	14	17	31	35
$f(x)$:	68.7	64.0	44.0	39.1

(செ.ப.)

10. $b_3 = 168$; $b_7 = 120$; $b_9 = 72$; $b_{10} = 63$
b_6, b_8-ன் மதிப்புகள் யாவை? (செ.ப.)

11. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து, லக்ராஞ்சி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 30 வயதிற்குக் குறைந்தவர்கள் எத்தனைபேர் என்பதைக் காண்க:

வயது (ஆண்டில்)	10–15	15–20	20–25	25–35	35–45	45–50
நபர்கள் (ஆயிரத்தில்)	193.5	880	933	1,636	1,221	830

(செ.ப.)

12. தங்களுக்குத் தெரிந்த ஏதாவதோர் இயல்கணித இடைச்செருகல் முறையை விளக்குக. அம் முறையில் மேற்கொள்ளப்படும் அனுமானங்களையும் தெளிவாகக் கூறுக.

x:	1	2	3	4	5
u_x:	10	50	70	80	100

எனத் தரப்பட்டுள்ளது $u_{2\cdot3}$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(செ.ப.)

13. கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து 1962ஆம் ஆண்டில் இயங்குகின்ற பாலிஸிகளின் எண்ணிக்கையை இடைச் செருகல் முறையால் காண்க:

ஆண்டு	1959	1960	1961	1963	1964	1965
பாலிஸிகளின் எண்ணிக்கை (இலட்சத்தில்)	66	73	81	99	106	112

14. கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்திலிருந்து ஒரு மூல அளவிற்கு விலை 7.5 ஆக உள்ளபோது அமையும் நிகழ்தகு தேவையை மதிப்பீடு செய்க.

ஒரு மூல அளவையின்விலை	5	6	7	8	9
தேவை	82	80	63	53	49

(செ.ப.)

10. குறியீட்டு எண்கள்

தினசரிச் செய்தித்தாள்களில் பல்வேறுவகைப்பட்டக் **குறியீட்டு எண்கள்** (Index Numbers) பற்றிப் பேசப்படுவதைப் பார்க்கின்றோம். விற்பனைப் பொருள்களின் குறியீட்டு எண்கள், விலைகளின் குறியீட்டு எண்கள், உற்பத்திப் பொருள்களின் குறியீட்டு எண்கள் இலாபத்தின் குறியீட்டு எண்கள், வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்கள் எனப் பலவாருகச் செய்திகளில் கூறப்படுவதைக் காண்கிறோம். குறிப்பாகப் பொருளாதார ஆய்வுகளிலும், வணிகத் துறையிலும் பல்வேறு குறியீட்டு எண்கள் கையாளப்படுகின்றன. பொதுவாக, குறியீட்டு எண் என்றால் என்ன? இதற்குக் கணக்கியல் வரையறை விளக்கம் யாது? வெவ்வேறு காலங்களில் ஒரு குழு (Set) வினைச் சார்ந்த மாறிகளின் (Variables) மதிப்புகளில் ஏற்படுகின்ற இணைமாறுதல்களை (Relative Changes)ஒப்பிடுவதற்குப் பயன்படும் கருவியே **குறியீட்டு எண்** எனப்படுவதாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு குழுவினைச் சார்ந்த பொருள்களின் மதிப்பு அல்லது அப் பொருள்களின் அளவு அல்லது அவற்றின் விலைகளில் ஏற்படும் சராசரி மாறுதலைச் சுட்டிக்காட்டும் எண் மதிப்பே குறியீட்டு எண்ணாகும். நிகழ்கின்ற மாறுதலை, மேல் நோக்காகப் பார்த்தவுடன் அறிவுறுத்தும் பணியை மேற்கொண்டதே குறியீட்டு எண்ணாகும். எடுத்துக்காட்டாக, 1972ஆம் ஆண்டினை ஒப்பிடுகின்றபோது 1974ஆம் ஆண்டில், மொத்த விற்பனையின் குறியீட்டு எண் 127 என்று கூறினால், அது பண்டங்களின் மொத்த விற்பனை விலை 1972ஆம் ஆண்டைவிட 1974ஆம் ஆண்டில் 27 சதவீதம் அதிகரித்துள்ளது என்பது பொருளாகும். இத்தகு குறியீட்டு எண்கள் எத்தனை வகைப்படும்? அவற்றுள் எது சிறந்தது? ஒவ்வொரு வகைக் குறியீட்டு எண்ணும் எந்த எந்தத் தருணங்களில் பயன்படும்? அத்தகு குறியீட்டு எண்களை உருவாக்குவது எப்படி என்பதைப் பார்ப்போம்.

இணை வீதங்கள்

மாறிகளின் மதிப்புகளில் ஏற்படும் மாறுதலை ஒப்பிட வேண்டும். அங்ஙனம் ஒப்பிடநோக்கும் கருவி எண் வடிவத்தில் அமையவேண்டும். பல்வேறு மாறிகள் பல்வேறு மூலஅளவை

களில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் ஒப்பிடநோக்குவது கடினமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, 5 ஆண்டுகள் ஒரு பொருள் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அளவும், அதன் விலையும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	உற்பத்தி அளவு (ஆயிரம் டன்னில்)	விலை (இலட்சக் கணக்கான ரூபாயில்)
1969–70	500	5.0
1970–71	551	5.7
1971–72	582	5.6
1972–73	610	6.5
1973–74	720	8.0

இப் பொருளின் உற்பத்தி அளவு 'டன்' என்ற மூல அளவையிலும், விலை 'ரூபாய்' என்ற மூல அளவையிலும் தரப்பட்டுள்ளன. எனவே, இம்மூல அளவைகளிலிருந்து விடுபட்ட எண்களை ஒப்பிடுவதுதான் சிறந்ததாகும். எனவே, 1969–70 என்ற ஆண்டை **'அடிப்படை ஆண்டு'** (Base Year) ஆக எடுத்துக் கொள்வோம். அடிப்படை ஆண்டில் மாறியின் மதிப்பை 100 எனக்கொள்வோம். அதாவது, உற்பத்தி அளவினையும், விலையையும் 100 எனக்கொள்வோம். உற்பத்தி அளவு 500 ஆயிரம் டன் என்பதை 100 ஆகவும், விலை ரூ. 5.2 இலட்சத்தை 100 ஆகவும் கொண்டு, பிற அடுத்தடுத்து வரும் ஆண்டுகளில் உள்ள மாறிக்கு அதற்கேற்ப **சதவீத இணை வீதங்களை** அல்லது **சதவீதச் சார்பு வீதங்களைக்** (Relatives) காணுதல்வேண்டும். அவற்றைக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் அமைப்போம்.

சதவீத இணை வீதங்கள்

ஆண்டு	உற்பத்தி	விலை
1969–70	**100**	**100**
1970–71	**110**	**114**
1971–72	**116**	**112**
1972–73	**122**	**130**
1973–74	**144**	**160**

எனவே, தற்போது 1969–70ஆம் ஆண்டினை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு மற்றைய ஆண்டுகளில் பொருள் உற்பத்தி, விலை அளவினை மேல்நோக்காக எளிதில் ஒப்பிடலாம். எனவே, இத்தகு இணைவீதங்கள் என்பனவும் ஒருவகைக் குறியீட்டு எண்களேயாகும். இத்தகு இணைவீதங்கள் **நிலையான அடி இணை வீதங்கள்** அல்லது **நிலையான சார்பு வீதங்கள்** (Fixed Base Relatives) என அழைக்கப்படும். இவ்வாறல்லாது, ஒவ்வொரு ஆண்டின் உற்பத்தி அளவையும், விலையையும், அதற்கு முந்திய ஆண்டு மதிப்புகளோடு ஒப்பிட, அதற்கு முந்திய ஆண்டினை அடிப்படை ஆண்டாகக்கொண்டு இணைவீதங்களைக் காணலாம். அவை **தொடர்இணை வீதங்கள்** அல்லது **தொடர் சார்பு இணை வீதங்கள்** (Link Relatives) எனப் பெயர்படும். மேற்கண்ட பண்டத்திற்குரிய உற்பத்தி அளவு, விலைகளுக்குரிய தொடர் இணைவீதங்களைக் காட்டும் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தொடர் இணை வீதங்கள்

ஆண்டு	உற்பத்தி	விலை
1969–70	100	100
1970–71	110	114
1971–72	106	98
1972–73	105	116
1973–74	118	123

மேற்கண்ட இணைவீதங்களையும், தொடர் இணைவீதங்களையும் வரிப்படத்தில் அமைத்துத் தெளிவுபடுத்தலாம். ஆண்டினை x-அச்சிலும், உற்பத்தி, விலைமாறிகளின் இணைவீதங்களை y-அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு புள்ளிகளை அமைத்து, அவற்றினை நேர்க்கோடுகளால் இணைத்து வரிப்படங்கள் வரையவேண்டும்.

இணை வீதங்களுக்கும் தொடர் இணை வீதங்களுக்குமுள்ள உறவு

எந்தவோர் ஆண்டிலும், அதன் நிலையான அடிப்படை இணைவீதமானது, அதன் முந்திய ஆண்டுகளின் தொடர் இணை வீதங்களின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும். இதனை எளிதில் காணலாம். அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு மாறியின் விலை மதிப்பு p_0 என்க. நடப்பு ஆண்டில் (Current Year) அதன் விலை மதிப்பு p_k என்க.

குறியீட்டு எண்கள்
எனில்,

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{p_k}{p_{k-1}} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdot \ldots \ldots \ldots \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_0}$$

$$= I_k \cdot I_{k-1} \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots I_2 \cdot I_1.$$

மேலே விவாதிக்கப்பட்ட நிலையான அடிப்படை இணை வீதங்களை நிலையான அடிக்குறியீட்டு எண்களாகவும் (Fixed Base Index Numbers), தொடர்இணை வீதங்களைச் சங்கிலித் தொடரான அடிக்குறியீட்டு எண்கள் (Chain Base Index Numbers) எனவும் கருதலாம். இவ்விரு குறியீட்டு எண்களில் ஒருவகைக் குறியீட்டு எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அதனை மற்றொருவகைக் குறியீட்டு எண்களாக எளிதில் மாற்றலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

1970ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்ட கீழ்க்காணும் நிலையான அடிக்குறியீட்டு எண்களை, சங்கிலித்தொடர் அடிக் குறியீட்டு எண்களாக மாற்றுக.

ஆண்டு	குறியீட்டெண்
1970	100
1971	125
1972	150
1973	200
1974	175

சங்கிலித்தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டு எண் தொடரில்,
1971ஆம் ஆண்டிற்கு 1970ஆம் ஆண்டு அடிப்படை ஆண்டு.
1972ஆம் ஆண்டிற்கு 1971ஆம் ஆண்டு அடிப்படை ஆண்டு.
1973ஆம் ஆண்டிற்கு 1972ஆம் ஆண்டு அடிப்படை ஆண்டு.
1974ஆம் ஆண்டிற்கு 1973ஆம் ஆண்டு அடிப்படை ஆண்டு.

1969ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டு எண் தெரியாததால், 1970ஆம் ஆண்டிற்குச் சங்கிலித்தொடர் குறியீட்டு எண் காண முடியாது. 1971ஆம் ஆண்டிற்குச் சங்கிலித்தொடர் குறியீட்டு எண் 125 என்பது தெளிவாகும். 1972ஆம் ஆண்டிற்கு அது $\frac{100}{125} \times 150 = 120$ என்பதாகும். 1973ஆம் ஆண்டிற்கு அது $\frac{100}{150} \times 200 = 133.3$ ஆகும். 1974ஆம் ஆண்டிற்கு அது $\frac{100}{200} \times 175 = 87.5$ ஆகும்.

ஆண்டு	சங்கிலித்தொடர் அடிக் குறியீட்டு எண்
1970	—
1971	125
1972	120
1973	133.3
1974	87.5

எடுத்துக்காட்டு

கீழே தரப்பட்டுள்ள சங்கிலித்தொடர் அடிக்குறியீட்டு எண்களிலிருந்து, நிலையான அடிக்குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	1900	1901	1902	1903	1904
சங்கிலித் தொடர் அடிக் குறியீட்டு எண்	80	110	120	90	140

(செ.ப.)

இது ஒரு சங்கிலித்தொடராகும். எனவே,

1900ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படை ஆண்டு 1899 ஆகும்.
1901ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படை ஆண்டு 1900 ஆகும்.
1902ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படை ஆண்டு 1901 ஆகும்.
1903ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படை ஆண்டு 1902 ஆகும்.
1904ஆம் ஆண்டிற்கு அடிப்படை ஆண்டு 1903 ஆகும்.

எனவே, 1899ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டுஎண் 100ஆகக் கொள்ள வேண்டும். எனில், 1900ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டு எண் 80 ஆகும்.
1901ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டு எண் $\frac{110}{100} \times 80 = 88$ ஆகும்;
1902ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டு எண் $\frac{120}{100} \times 88 = 105.6$ ஆகும்;
1903ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டு எண் $\frac{90}{100} \times 105.6 = 95.04$ ஆகும்;
1904ஆம் ஆண்டில் குறியீட்டு எண் $\frac{140}{140} \times 95.04 = 133.05$ ஆகும்.

ஆண்டு	1899	1900	1901	1902	1903	1904
குறியீட்டு எண்	100	80	88	105	95.6	133.05

குறியீட்டு எண் – வரையறை – சில அடையாளக் குறிகள்

விலை இணைவிகிதத்தின் சராசரியே (Average price-relatives) குறியீட்டு எண்ணாகும் என வரையிலக்கணம் தரலாம். கையாளப் படுகின்ற சராசரிக்கேற்ப குறியீட்டு எண்கள் வெவ்வேறு வகை யாகப் பெறப்படுகின்றன.

குறியீட்டு எண்களைப் பற்றிப் பேசுகின்றபோது கையாளப் படுகின்ற சில அடையாளக்குறிகளை இப்போது விளக்குவோம். p_0 என்பது அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு பண்டத்தின் விலையாகும்; p_k என்பது k-ஆவது ஆண்டில் அல்லது நடப்பு ஆண்டில் அப் பண்டத்தின் விலையாகும். q_0 என்பது அடிப்படை ஆண்டில் அப் பண்டத்தின் அளவையாகும்; q_k என்பது k-ஆவது ஆண்டில் அல்லது நடப்புஆண்டில் அப் பண்டத்தின் அளவையாகும்.

சில எளிய குறியீட்டு எண்கள்

முதல் எளிய குறியீட்டு எண் $\frac{1}{n} \Sigma \frac{p_k}{p_0}$ ஆகும். இங்குப் பண்டங்களின் எண்ணிக்கையை n காட்டுகிறது; கூட்டல் அடையாளம் Σ எல்லாப்பண்டங்களுக்கும் தொடர்பானதாகும். இதனைத் **தனிக் கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டு எண்** (Simple Arithmetic Mean Index Number) என அழைக்கின்றோம்.

இரண்டாவது எளிய குறியீட்டு எண் $\left[\pi \left(\frac{p_k}{p_0} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$

எல்லாப்பண்டங்களின் $\frac{p_k}{p_0}$ ன் பெருக்கலுக்காக π நிற்கிறது. இதனைத் **தனிப் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டு எண்** (Simple Geometric Mean Index Number) என அழைக்கின்றோம்.

மூன்றாவது எளிய குறியீட்டு எண் $\Sigma \frac{n}{\frac{p_0}{p_k}}$ ஆகும். இதனைத் **தனி ஹார்மானிக் சாரசரிக் குறியீட்டு எண்** (Simple Hormonic Mean Index Number) எனக் கூறுகின்றோம். எனவே, குறியீட்டு எண்களான விலையின் இணை வீதங்களுக்கு, வெவ்வேறு சராசரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன என்பது தெளிவாகும்.

கூட்டுச்சராசரி, பெருக்குச்சராசரி, ஹார்மானிக்சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவதுபோலவே, பிற சராசரிகளையும் (இடைநிலை, முகடு) பயன்படுத்தலாம். ஆனால், அவைகளின் நிலையற்ற தன்மையால் அவைகளைப் பயன்படுத்துவதில்லை.

இவை தவிர, $\frac{\Sigma p_k}{\Sigma p_o}$ என்ற **கூட்டுக் குறியீட்டு எண்** (Aggregate Index Number) என்பதும் கையாளப்படுகிறது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது.

குறியீட்டு எண்கள் எல்லாம் சதவீதத்தில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

1899–1900, 1903–04, 1914–15 ஆகிய ஆண்டுகளில் சென்னை மாநிலத்தில் ஆறுவகை உணவுத் தானியங்களின் சில்லறை விலைகளைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்தி, *1903–04*ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்டு, *1899–1900, 1914–15*ஆம் ஆண்டுகளுக்குத் தானிய விலைகளின் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டு எண்களைக் காண்க.

ஆண்டு	விலை (ரூபாயில்)					
	நெல்	சோளம்	கம்பு	கேழ்வரகு	வரகு	கானம்
1899—1900	195	278	257	251	135	280
1903—1904	158	168	157	155	94	206
1914—1915	272	326	309	304	195	408

(செ.ப.)

(1) *1899–1900*ஆம் ஆண்டிற்குப் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டு எண் காண்போம்.

விலை இணைவீதங்கள்:

$$\text{நெல்} = \frac{158}{195}$$

$$\text{சோளம்} = \frac{168}{278}$$

$$\text{கம்பு} = \frac{157}{257}$$

$$\text{கேழ்வரகு} = \frac{155}{251}$$

$$\text{வரகு} = \frac{94}{135}$$

$$\text{கானம்} = \frac{206}{280}$$

பெருக்குச் சராசரி =

$$\left[\frac{158}{195} \times \frac{168}{278} \times \frac{157}{257} \times \frac{155}{251} \times \frac{94}{136} \times \frac{206}{280}\right]^{\frac{1}{6}}$$

$$= 1.481$$

∴ பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண் $= 1.481 \times 100$
$= \mathbf{148.1}$

இதுபோன்றே, 1914–15ஆம் ஆண்டிற்குரிய குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கவும்.

எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்கள்

மேற்கண்ட எளிய குறியீட்டு எண்களில் மக்கள் பயன் படுத்தும் பண்டங்களின் அளவுகள் கையாளப்படாத காரணத்தால் அவை சிறப்பானவையன்று. அவற்றினைக்கொண்டு வாழ்க்கைத் தர ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் கணிக்கமுடியாது. நடுத்தரக் குடும்பம் ஒன்றுக்கு அரிசி, சர்க்கரை, எண்ணெய், காய்கறிகள், முந்திரிப் பருப்பு முதலிய பல பொருள்களும் பயன்பட்டாலும், பயன் படுத்தப்படும் அளவுகள் வெவ்வேறானவை. அரிசி பயன்படுத்தப் படும் அளவிற்கு முந்திரிப்பருப்பு பயன்படுத்தப்படமாட்டாது. அரிசியின் விலை இருமடங்காகவும், முந்திரிப்பருப்பின் விலை பத்து மடங்காகவும் அதிகமானால், எளிய குறியீட்டு எண் முறைப்படி $\left(\frac{2+10}{2}\right) \times 100 = 600$ குறியீட்டு எண்ணாக அமையும். எனவே, அக் குடும்பத்திற்கு வாழ்க்கைக்குரிய செலவு 6 மடங்காகிறது எனப் பொருளாகிறது. இது தவறாகும். பண்டங்களின் பயன்படுத்தப் படும் அளவாகிய எடையினைக் கைக்கொள்ளாததால் இத் தவறு நிகழ்கின்றது. இத் தவற்றினைத் தவிர்க்க எடைகளைச் சேர்த்து எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்களைக் கணிக்கிறோம். எனவே, $p_o\, q_o$, $p_k\, q_k$, $p_o\, q_k$, $p_k\, q_o$ என்ற அளவோடு கூடிய விலைகளை எடை களாக (Weights) எடுத்துக் கொள்கிறோம். இத்தகைய எடைகளைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச் சராசரி கண்டால், $\frac{\Sigma\, p_o\, q_o \left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\Sigma\, p_o\, q_o}$,

$$\frac{\Sigma\, p_k\, q_k\left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\Sigma\, p_k\, q_k}, \quad \frac{\Sigma\, p_o\, q_k\left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\Sigma\, p_o\, q_k}, \quad \frac{\Sigma\, p_k\, q_o\left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\Sigma\, p_k\, q_o}$$

என்ற எண்களைப் பெறுகின்றோம். அவையாவன:

(1) $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o}$

(2) $$\frac{\sum p_k q_k \left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\sum p_k q_k}$$

இங்குக் கூட்டுச் சராசரிக்குப்பதிலாக ஹார்மானிக் சராசரி எடுப்பது சிறந்தது. அங்ஙனம் எடுப்பின்,

$$\frac{\sum p_k q_k}{\sum p_k q_k \left(\frac{p_o}{p_k}\right)} = \frac{\sum p_k q_k}{\sum p_o q_k}$$

(3) $\frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}$ (4) $\frac{\sum p_k p_o \left(\frac{p_k}{p_o}\right)}{\sum p_k q_o}$

முதல் எண்ணிற்கு **லாஸ்பெயரின் சூத்திரம்** (Laspeyre's Formula) எனவும், மூன்றுவது எண்ணிற்கு **பாஸ்சி சூத்திரம்** (Paasche's Formula) எனவும் பெயராகும். இவற்றைத்தவிர, $\frac{\sum p_k q_k}{\sum p_o q_o}$ என்ற குறியீட்டு எண்ணும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும் $\frac{\Sigma p_k (q_o + q_k)}{\Sigma p_o (q_o + q_k)}$ என்ற மார்ஷல், எட்ஜ்வர்த் குறியீட்டு எண் (Marshall and Edgeworth's Index Numbers))-ஆம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

லாஸ்பெயர், பாஸ்சி சூத்திரங்களின் பெருக்குச் சராசரி ஒரு குறியீட்டு எண்ணைகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதற்கு ∴ **பிஷர் இலட்சியக் குறியீட்டு எண்** (Fisher Ideal Index Number) எனப் பெயர் வழங்குகிறது. அது;

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \cdot \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}} \text{ ஆகும்.}$$

எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்கள் அனைத்திலும் இதுவே தலைசிறந்ததாகும்.

பொருத்தமான குறியீட்டு எண்

தனிக் குறியீட்டு எண்கள் சிலவற்றையும்; எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்கள் சிலவற்றையும் கண்டோம். குறியீட்டு எண் ஒன்று எந்தவித ஒருதலைச் சார்பு (bias) மின்றி, நடு

நிலைமையாக, அப்பழுக்கின்றி, சீரிய (ideal) தன்மையானதாக அமையவேண்டும். அந்நிலையில், அதாவது ஓர் இலட்சிய நிலையில் ஒரு குறிப்பீடு அமைய, அது கீழ்க்காணும் மூன்று சோதனைகளையும் திருப்திப்படுத்தவேண்டும். அச் சோதனைகளாவன:

(1) பண்டமாற்றுச் சோதனை (Commodity Reversal Test)

ஒரு குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கும்போது, எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட பண்டங்களின் வரிசைஎண் முறை மாற்றப் பட்டாலும், கணிக்கப்பட்ட குறியீட்டு எண் மதிப்பு மாறுமலிருக்க வேண்டும். நாம் விவாதித்த, எல்லா எளிய, எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்களும் இச் சோதனையை மிக எளிதாகத் திருப்திப் படுத்துகின்றன என்பது தெளிவாகும். பண்டங்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் வரிசைமுறை மாற்றம் இதனைப் பாதிப்பதில்லை.

(2) காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test)

குறியீட்டு எண்களைக் கணிக்கின்றபோது, அடிப்படை ஆண்டினையும், நடப்புஆண்டினையும் கணிப்பில் எடுத்துக்கொள் கின்றோம். நடப்பு ஆண்டினையும், அடிப்படை ஆண்டினையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிப் பெறப்படும் குறியீட்டு எண்ணையும், முந்திய குறியீட்டு எண்ணையும் பெருக்கினல் அது ஒன்றுக்குச் சமமானல், எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட குறியீட்டு எண் காலமாற் றுச் சோதனையில் வெற்றிபெறுகிறது எனக்கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o}$ என்பது ஒரு குறியீட்டு எண். அடிப்படை ஆண்டையும், நடப்பு ஆண்டினையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிப் பெறப்படும் குறியீட்டு எண் $\frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k}$ ஆகும்.

எனவே, $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o}$ என்பது காலமாற்றுச் சோதனையைத் திருப்திப்படுத்த வேண்டுமெனில் $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} = 1$ ஆக அமையவேண்டும்; ஆனல் இங்கு $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \neq 1$. எனவே எடுத்துக்காட்டில் காட்டப்பட்டுள்ள குறியீட்டு எண் கால மாற்றுச் சோதனையில் வெற்றி பெறவில்லை. அடுத்த எடுத்துக் காட்டாக, $\left(\frac{p_k\, p'_k{}^T \ldots\ldots\ldots}{p_o\, p'_o{}^T \ldots\ldots\ldots}\right)^{\frac{1}{n}}$ என்ற பெருக்குச் சராசரிக் குறி

யீட்டு எண்ணை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் அடிப்படை ஆண்டு, நடப்பு ஆண்டுகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்ற நாம் பெறும் குறியீட்டு எண் $\left(\frac{p_o\ p_o' \cdots\cdots}{p_k\ p_k' \cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$ ஆகும். இவைகளின்பெருக்கல் =

$$\left[\frac{p_k\ p_k' \cdots\cdots}{p_o\ p_o' \cdots\cdots} \times \frac{p_o\ p_o' \cdots\cdots}{p_k\ p_k' \cdots\cdots}\right]^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

ஆகும். எனவே, இப் பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டு எண் காலமாற்றுச் சோதனையில் வெற்றிபெறுகிறது.

(3) எடையோடு கூடிய குறியீட்டு எண்களில் நாம் கையாளும் காரணிகள் பண்டவிலை, பண்ட அளவு p-யும் q-யுமாகும். விலைகளுக்கு எடுக்கப்படும் குறியீட்டு எண், பயன்படும் அளவிற்கு அளவுகளுக்கு எடுக்கப்படும் குறியீட்டு எண்ணிற்கும் பயன்பட வேண்டுமென்ற கருத்தில் இச் சோதனை எடுத்துக்கொள்ளப்படு கிறது. இச் சோதனையாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறியீட்டு எண்ணையும், அதில் p, q-யை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிப் பெறப்படும் புதிய குறியீட்டு எண்ணையும் பெருக்க $\frac{\Sigma\ p_k\ q_k}{\Sigma\ p_k\ q_o}$ பெறப்பட வேண்டும். இதனைக் காரணிமாற்றுச் சோதனை என அழைக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டு எண் $\frac{\Sigma\ p_k\ q_o}{\Sigma\ p_o\ q_o}$ -ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். p-யையும் q-வையும்ஒன்றுக்கொன்று மாற்றினால் $\frac{\Sigma\ q_k\ p_o}{\Sigma\ q_o\ p_o}$ என்ப தாகும். இவ்விரண்டையும் பெருக்கினால் $\frac{\Sigma\ p_k\ q_o}{\Sigma\ p_o\ q_o} \cdot \frac{\Sigma\ q_k\ p_o}{\Sigma\ q_o\ p_o} \neq \frac{\Sigma\ p_k\ q_k}{\Sigma\ p_o\ q_o}$ ஆகும். எனவே கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டு எண், காரணி மாற்றுச் சோதனையில் வெற்றி பெறவில்லை.

ஒருதலைச் சார்புடைய குறியீட்டு எண்கள்

காலமாற்றுச் சோதனையில் வெற்றிபெறாத குறியீட்டு எண்களை ஒருவகைத் தலைச்சார்பு (Type Bias) உடைய குறியீட்டு எண்களாகக் கருதவேண்டும்.

I_A, I_G, I_H. என்பன முறையே கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக் சராசரிக் குறியீட்டு எண்கள் என்க.

கூட்டுச்சராசரி $\geq$ பெருக்குச்சராசரி $\geq$ ஹார்மானிக்சராசரி எனவே

$$I_A \geq I_G \geq I_H$$

அடிப்படை ஆண்டையும், நடப்பு ஆண்டையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிப் பெறப்படும் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார் மானிக் சராசரிக் குறியீட்டு எண்கள் $I_A{}^1$, $I_G{}^1$, $I_H{}^1$ என்க.

$$\therefore \quad I_A{}^1 \geq I_G{}^1 \geq I_H{}^1$$

$$\therefore \quad I_A . I_A{}^1 \geq I_G \, I_G{}^1 \geq I_H \, I_H{}^1$$

ஆனால் $I_G . I_G{}^1 = 1.$

$$\therefore \quad I_A . I_A{}^1 > 1 \; ; \quad I_H . I_H{}^1 < 1$$

எனவே கூட்டுச் சராசரி மேல்முகத் தலைச்சார்பு (upward bias) உடையது; ஹார்மானிக் சராசரி கீழ்முகத் தலைச்சார்பு (downward bias) உடையது.

எனவே, இத்தலைச் சார்புகளை நீக்கவேண்டுமாயின், கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டு எண், ஹார்மானிக் சராசரிக் குறியீட்டு எண் ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைக்கண்டு, அதனைக் குறியீட்டு எண்ணாகக் கொள்ளவேண்டும்.

ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண் – ஓர் இலட்சியக் குறியீட்டு எண்

ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண் மேற்கண்ட பண்டமாற்றுச் சோதனை, காலமாற்றுச் சோதனை, காரணிமாற்றுச் சோதனை ஆகிய மூன்றிலும் வெற்றிபெறுவதால், இது ஓர் இலட்சியக் கு ட்டு எண் (Ideal Index Number) எனக் கருதப்படுகிறது. அது எவ்வாறு மூன்று சோதனைகளையும் திருப்திப்படுத்துகிறது என்பதைக் காண் போம். ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண்

ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண் $= I = \sqrt{\dfrac{\Sigma \, p_k \, q_o}{\Sigma \, p_o \, q_o} \cdot \dfrac{\Sigma \, p_k \, q_k}{\Sigma \, p_o \, q_k}}$

(i) இது பண்டமாற்றுச் சோதனையை எளிதில் திருப்திப் படுத்துகிறது. பண்டங்களின் வரிசைஎண் மாற்றம் இதனைப் பாதிப்பதில்லை.

(ii) $I = \sqrt{\dfrac{\Sigma \, p_k \, q_o}{\Sigma \, p_o \, q_o} \cdot \dfrac{\Sigma \, p_k \, q_k}{\Sigma \, p_o \, q_k}}$.

இதில், o-வையும் k-யையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்ற நாம் பெறுவது

$$I^1 = \sqrt{\frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \cdot \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_k q_o}}$$

$$\therefore \quad I.\ I^1 = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \cdot \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k} \cdot \frac{\Sigma p_o q_k}{\Sigma p_k q_k} \cdot \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_k q_o}}$$

$$= 1.$$

எனவே, ஃபிஷரின் குறியீட்டு எண் காலமாற்றுச் சோதனையில் வெற்றிபெறுகிறது.

(iii) I-ல் p-யையும் q-யையும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்ற,

$$I^1 = \sqrt{\frac{\Sigma q_k p_o}{\Sigma q_o p_o} \cdot \frac{\Sigma q_k p_k}{\Sigma q_o p_k}}.$$

$$\therefore \quad I.\ I^1 = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \cdot \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k} \cdot \frac{\Sigma q_k p_o}{\Sigma q_o p_o} \cdot \frac{\Sigma q_k p_k}{\Sigma q_o p_k}}$$

$$= \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_o}$$

எனவே, ஃபிஷர் குறியீட்டு எண் காரணி மாற்றுச்சோதனையிலும் வெற்றிபெறுகிறது:

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு எடையுடன் கூடிய குறியீட்டு எண்கள் சிலவற்றைக் காண்க.

இனங்கள்	ஒரு மூலஅளவிற்கு விலை		பயன்படுத்தப்பட்ட அளவுகள்	
	1965 ரூ.	1970 ரூ.	1965	1970
A	9	15	5	5
B	8	12	10	11
C	4	5	6	6
D	1	1.50	4	8

(சே.ப.)

1965ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகவும், 1970ஆம் ஆண்டை நடப்பு ஆண்டாகவும் கொள்வோம்.

லாஸ்பெயர் குறியீட்டு எண் $= \frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times 100$

$$= \frac{(5\times 15) + (12\times 10) + (5\times 6) + (1.50\times 4)}{(9\times 5) + (8\times 10) + (4\times 6) + (1\times 4)} \times 100$$

$= 151.$

பாஸ்சி குறியீட்டு எண்

$$= \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}$$

$$= \frac{(15\times 5) + (12\times 11) + (5\times 6) + (1.50\times 8)}{(9\times 5) + (8\times 11) + (4\times 16) + (1\times 8)} \times 100$$

$= 121.5.$

ஃபிஷர் குறியீட்டு எண் $= \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_k q_k}{\Sigma p_o q_k}} \times 100$

$$= \sqrt{1.51 \times 1.215} \times 100$$

$= 135.5.$

வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்கள்

பொருளாதார அடிப்படையில் மக்களை வெவ்வேறு வகையினராகப் (Classes) பிரிக்கலாம். ஒவ்வொரு வகையினரும் வாழ்க்கைக்குப் பயன்படுத்தும் பண்டங்களும், பண்டங்களின் அளவுகளும் வேறுபட்டனவாக இருக்கும். மேலும், ஒரே பொருளாதார வகையினத்தில், நாட்டின் வெவ்வேறு பகுதியில் பயன்படுத்தும் பண்டங்களும், அவற்றின் அளவுகளும் மாறுபடும். எனவே, எல்லா வகுப்பினருக்கும், வெவ்வேறு நாட்டுப் பகுதிகளில் வாழும் மக்களுக்கும் ஒரேவிதக் குறியீட்டு எண் பயன்படாது. எனவே, நாட்டைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு, ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் வெவ்வேறு பொருளாதார வகுப்பைச் சார்ந்தவருக்கு வெவ்வேறு குறியீட்டு எண்களைக் கணிக்கவேண்டுமென்பது தெளிவாகும். அடுத்து, இவ்வாறு குறியீட்டு எண்களைக் கணிக்கும்போது, மக்கள் பயன்படுத்தும் பொருள்களை, உணவு, உடை, எரிபொருள்கள், குடியிருப்பு வாடகை, இதரவகைகள் என்பனவாகச் செலவினங்களைப் பாகு

படுத்திக்கொள்ளவேண்டும். இந்த ஐந்துவகைக் குழுச் செலவினங்களுக்குத் தனித்தனியாகக் குறியீட்டு எண்கள்கண்டு, பின் எல்லாவற்றையும் ஒருங்கிணைத்துக் காணப்படும் குறியீட்டு எண்ணிற்கு **வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டு எண்** (Cost of living Index Number) எனப் பெயராகும். ஒரே பொருளாதார வகுப்பைச் சார்ந்தவரின் வாழ்க்கைத்தர அடிப்படை ஆண்டோடு ஒப்பிடும்போது, நடப்பு ஆண்டில் வளர்ந்துள்ள அல்லது தேய்ந்துள்ள பொருளாதார நிலையை அளப்பதற்கு இக் குறியீட்டு எண் பயன்படுகிறது.

இந்த வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்களை *(1)* மொத்தச் செலவினமுறை (The Aggregate Expenditure Method); *(2)* குடும்ப பட்ஜெட்முறை (Family Budget Method) ஆகிய இரு முறைகளில் கணிக்கலாம்.

மொத்தச் செலவின முறையில், ஒரு பொருளாதார வகுப்பினர் செலவுசெய்யும் பண்டங்களின் அளவுகள் எடைகளாகக் கருதப்பட்டு அவைகள் அடிப்படை ஆண்டிற்குக் கணிக்கப்படுகின்றன; பின் ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் ஒவ்வொரு பண்டத்தின் மொத்தச் செலவு கணிக்கப்படுகிறது. நடப்பு ஆண்டில் பொருள்களின் விலைகள் p_k-யையும், அடிப்படை ஆண்டில் அவைகளின் அளவுகள் q_o-யையும் பெருக்கி அதன் கூடுதல் $\Sigma p_k q_o$ பெறப்படுகின்றது. இதுபோலவே, அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு பொருளின் விலை p_o-யையும், அதே ஆண்டில் அதன் அளவு q_o-யையும் பெருக்கி மொத்தச் செலவினம் $\Sigma p_o q_o$ கணிக்கப்படுகிறது. பின், நடப்பு ஆண்டின் மொத்தச் செலவினம் $\Sigma p_k q_o$ அடிப்படை ஆண்டின் மொத்தச் செலவினம் $\Sigma p_o q_o$-ஆல் வகுக்கப்பட்டு 100-ஆல் பெருக்கப்படுகிறது. அதாவது, $\frac{\Sigma p_k q_o}{\Sigma p_o q_o} \times 100$ காணப்படுகிறது. இது லாஸ்பெயர் குறியீட்டெண்ணேயாகும். இதுவே மொத்தச் செலவின முறையில் காணப்படும் வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணாகும்.

குடும்ப பட்ஜெட் முறையில், ஒரு நடுத்தரக் குடும்பத்தினர் பயன்படுத்தும் பல பொருள்களின்மீது மொத்தச் செலவினம் முதலில் மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது. இவைகள் எடைகளாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றன. பின், அடிப்படை ஆண்டில் செலவு செய்யப்பட்ட பண்டங்களின் அளவுகளால் விலைகள் பெருக்கப்பட்டு, அவை எடை மதிப்புகளாகக் (Value Weights) கொள்ளப்படுகின்றன. $\Sigma p_o q_o$ பெறப்படுகிறது. பின் ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் விலை இணைமதிப்புக் காணப்படுகிறது. ஒவ்வொரு

பொருளின் எடைமதிப்பால், இவ்விலை இணைமதிப்புப் பெருக்கப்பட்டு, பெருக்கற்பலன் மொத்த எடையால் வகுக்கப்படுகிறது. அதாவது, வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்

$$= \frac{\Sigma \left(\frac{p_k}{p_o} \times 100 \right) p_o \, q_o}{\Sigma \, p_o \, q_o} = \frac{\Sigma \, I \, W}{\Sigma \, W}$$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு சராசரி தொழிலாளர் குடும்ப பட்ஜெட்டின் எடைகளும், குறியீட்டு எண்களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடைகளோடு பொருந்திய வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைக் காண்க.

இனம்	குறியீட்டு எண்	எடை
உணவு	352	48
விளக்கு, எரிபொருள்	220	10
உடை	230	8
வாடகை	160	12
பிற	190	15

(ஐ.எ.எஸ்.)

$$I = \frac{(352 \times 48) + (220 \times 10) + (230 \times 8) + (160 \times 12) + (190 \times 15)}{48 + 10 + 8 + 12 + 15}$$

$$= 276.4.$$

எடுத்துக்காட்டு

மொத்தச் செலவினங்கள் முறையாலும், குடும்ப பட்ஜெட் முறையாலும் கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு 1939ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக்கொண்டு 1940ஆம் ஆண்டிற்கு வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடவும்.

பொருள்கள்	1939ஆம் ஆண்டில் பயன்படுத்தப் பட்ட அளவு	அளவு	1939-ல் விலை (ரூபாயில்)	1940-ல் விலை (ரூபாயில்)
அரிசி	6 மணு	மணு	5.75	6.00
கோதுமை	6 மணு	மணு	5.00	8.00
பருப்பு	1 மணு	மணு	6.00	9.00
பயறு	6 மணு	மணு	8.00	10.00
நெய்	4 சேர்	சேர்	2.00	1.50
சர்க்கரை	1 மணு	மணு	20.00	15.00

(செ.ப.)

மொத்தச் செலவு முறை

லாஸ்பெயர் குறியீட்டு எண்

$$= \frac{\Sigma\, p_k\, q_o}{\Sigma\, p_o\, q_o} \times 100$$

$$= \frac{(6\times6)+(8\times6)+(9\times1)+(10\times6)+(1.50\times4)+(15\times1)}{(5.75\times6)+(6\times5)+(6\times1)+(8\times6)+(4\times2)+(20\times1)}\times 100$$

$$= \frac{174}{146.50} \times 100 = 118.8$$

குடும்ப பட்ஜெட் முறை

பொருள்கள்	$I = \frac{p_k}{q_o} \times 100$	w	$W = p_o q_o$	$I \times W$
அரிசி	104.30	6	34.50	3598.35
கோதுமை	160.00	6	30.00	4800.00
பருப்பு	150.00	1	6.00	900.00
பயறு	125.00	6	48.00	6000.00
நெய்	75.00	4	8.00	600.00
சர்க்கரை	75.00	1	24.00	1500.00
மொத்தம்			146.50	17398.35

$$\text{வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்} = \frac{\Sigma I w}{\Sigma w} = \frac{17,398.35}{146.5} = 118.8$$

குறியீட்டு எண்களை உருவாக்குகையில் கருதத்தக்கன

குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கும்போது, (1) சரியான அடிப்படை ஆண்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல். (2) செலவினங்களின் தேர்வு (3) தகுந்த சராசரியைத் தேர்ந்தெடுத்தல் (4) தகுந்த எடைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் ஆகிய நான்கும் கவனிக்கத் தக்கன.

அடிப்படை ஆண்டைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டு அடிப்படையாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. போதிய நீண்ட காலப்பருவத்திற்கு அதுவே அடிப்படை ஆண்டாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அந்நீண்ட காலத்திலும் நாட்டின் பொருளாதாரச் சூழ்நிலை எவ்விதத் திடீர் மாற்றமின்றித் தராதர நிலையில் அமைந்திருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஓர் ஆண்டினை நிலையான அடிப்படை ஆண்டாகவும், ஓர் ஆண்டிற்கு முந்திய ஆண்டை அவ்வாண்டிற்குரிய அடிப்படை ஆண்டாகவும் கருதும் இருவகைகள் உண்டு. இந்த இரண்டாவது முறையில், ஒவ்வோர் ஆண்டின் விலைமாற்றத்தை முந்திய ஆண்டோடு ஒப்பிட்டு நோக்க ஏதுவாகின்றது. இம் முறையில் தள்ளத்தக்கப் பொருள்களை ஒதுக்கிவிட்டு, சேர்க்கத்தக்கப் புதுப்பொருள்களைச் சேர்த்துக்கொள்ள ஏதுவாகிறது. மேலும், திடீர்திடீரென விலைகள் மிகமிகையாக ஏறவும் இறங்கவும் பொருளாதாரச் சூழ்நிலை இருக்குமாயின், இவ்விரண்டாம் முறை பெரிதும் பயன் படுகிறது.

செலவினங்களைப் பொறுக்கும்போது, நம் குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கும் நோக்கத்தைப்பொறுத்து அவ்வினங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். கல்லூரி மாணவர்களது கல்விச் செலவிற்குரிய குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கும்போதும், அந்நிய நாட்டு வணிகக் குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கும்போதும் நாம் கவனிக்கத்தக்க செலவினங்கள் வெவ்வேறு வகையானவை என்பது தெளிவாகும். இனங்களும், இனங்களின் அளவுகளும் ஏற்ற முறையில் செவ்வனே தேர்ந்தெடுக்கப்படவேண்டும்.

இனி, ஏற்றதொரு சராசரியைத் தேர்ந்தெடுப்பது அவசியமாகும். கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மானிக்

சராசரி, முகடு, இடைநிலை ஆகிய வெவ்வேறு சராசரிகளில் மிக எளியமுறையில் குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கவேண்டுமாயின் கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், அது கால மாற்றுச் சோதனையில் வெற்றிபெறுது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத் தக்கது. பெருக்குச் சராசரி காலமாற்றுச் சோதனைக்கு உட்பட்டு, அதனைத் திருப்திப்படுத்துகிறது. பழைய செலவினங்களை நீக்கி விட்டு, புதிய செலவினங்களைச் சேர்ப்பதற்கு இதில் முடியும் என்றாலும், கணிப்பதற்கு இது மிகவும் தொல்லையானது. நடைமுறையில், கூட்டுச் சராசரியும், பெருக்குச் சராசரியும் மட்டுமே பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

விலைகளின் குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிட, செலவு செய்யப் பட்ட அல்லது பயன்படுத்தப்பட்ட அல்லது உற்பத்தியான பொருளின் அளவை எடையாகக் கொள்ளலாம். பொருள்கள் பயன்படும் முக்கியத்திற்கேற்ப அவைகளின் அளவைகளாகிய எடைகள் எடுத்துக்கொள்ளப்படவேண்டும். ஒரு நடுத்தரக் குடும்பத்திற்கு ஒரு மாதத்திற்கு 100 கிலோ அரிசி செலவினமாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். முந்திரிப்பருப்பு அரை கிலோவாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பொருளும் அது பயன்படும் அளவிற்கு எடையாக எடுத்துக் கொள்ளப்படல் வேண்டும். நிலையான எடைகள், பெரிதும் பயன்படும் அளவில் மாறுபடுகின்ற தன்மையைத் தவிர்ப்பது நல்லது.

இந்தியாவில் கையாளப்படும் சில முக்கிய குறியீட்டு எண்கள்

நம் நாட்டில் சிறப்பாகக் கையாளப்படும் சில குறியீட்டு எண்களை இங்குக் குறிப்பிடுவோம்.

தொழிலாளர்கள் வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண், நம் நாட்டில் கையாளப்படும் பல குறியீட்டு எண்களில் ஒன்றாகும். மத்திய அரசின் தொழிலாளர் கழகம் இத்தகைய குறியீட்டு எண்களை அவ்வப்போது உருவாக்கிக் கையாண்டு வருகிறது. இராச்சிய அரசுகளும் இத்தகைய குறியீட்டு எண்களைக் கணித்துக் கையாளுகின்றன.

இரண்டாவது, சென்னை நகரத் தொழிலாளர் வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டு எண்ணாகும். நெசவுத் தொழிற்சாலை, இரயில் தொழிலாளர் நிலையம், பொறியியல் செய்தளங்கள், எண்ணெய்க் கிடங்குகள், அச்சகங்கள் ஆகிய ஐந்து தொழிற்கூடங்களிலிருந்து, உணவு, உடை, விளக்கு எரிபொருள், வீட்டு வாடகை, பிற இனங்கள் ஆகிய ஐந்து இனங்களில் செலவு சேகரிக்கப்பட்டு 1935–36ஆம் ஆண்டில் ஒரு குடும்ப பட்ஜெட் ஆய்வு மேற்

கொள்ளப்பட்டது. அதிலிருந்து குறியீட்டு எண் கணிக்கப் பட்டது.

மூன்றாவது, அகில இந்திய சராசரி தொழிலாளர் வகுப்பின ரது வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணுகும். அனைத்து இந்தியா விற்கும் கணிக்கப்படும் இக் குறியீட்டு எண் பொருளற்றதாயினும், புள்ளிவிவரத்திற்காக இது கணிக்கப்படுகிறது. முதன்முதலில் 1944ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக்கொண்டு இக் குறியீட்டு எண் கணிக்கப்பட்டது.

நான்காவது, விவசாய உற்பத்தியின் குறியீட்டு எண். 19 வகை முக்கிய விவசாய உற்பத்திப் பொருள்களுக்கு ஐந்து வருடங்களுக்கு ஒருமுறை வீதம், இந்திய மத்திய அரசின் உணவு விவசாய இலாக்காவினைச் சார்ந்த பொருளாதாரப் புள்ளியியல் இயக்குநரால் இது கணிக்கப்படுகிறது.

ஐந்தாவது, தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பொருள்களின் குறி யீட்டு எண்ணும் கணிக்கப்பட்டு, கையாளப்பட்டு வருகிறது. மத்திய அரசில் தொழிற்சாலைப் புள்ளிவிவர இயக்குநர் அலுவல கத்தார் 1946ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக்கொண்டு இதனைக் கணித்துக் கையாண்டு வருகின்றனர்.

இதுதவிர, வணிகப் பொருள்களின் குறியீட்டு எண், இந்திய ரிஸர்வ் வங்கியின் பாதுகாப்புப் பத்திர விலைகளின் குறியீட்டு எண், தொழிற்சாலைப் பணியாள்களின் ஊதியக் குறியீட்டு எண், தொழிற்சாலைகளின் இலாபக் குறியீட்டு எண், வெளிநாட்டு வணிகக் குறியீட்டு எண் என்பன போன்ற பல்வேறு குறியீட்டு எண்கள் கணித்துக் கையாளப்படுகின்றன.

பயிற்சி

1. கீழ்க்காணும் சங்கிலித்தொடர் அடிக்குறியீட்டு எண் களிலிருந்து நிலையான அடிக்குறியீட்டு எண்களைத் தயார் செய்க:

ஆண்டு	1900	1901	1902	1903	1904
குறியீட்டு எண்	80	110	120	90	140

(செ.ப.)

2. கீழ்க்காணும் நிலையான அடிக்குறியீட்டு எண்களிலிருந்து, சங்கிலித்தொடர் அடிக்குறியீட்டு எண்களைத் தயார் செய்க:

1940	1941	1942	1943	1944
267	275	280	290	320

(செ.ப.)

3. குறியீட்டு எண்களின் பயன்களை விளக்குக. வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைத் தயார் செய்யும்போது, பின்பற்றப்படவேண்டிய வழிமுறைகளை விளக்குக.
(செ.ப. ம.ப.)

4. ஒரு சராசரி தொழிலாளர் வகுப்பினரது குடும்ப பட்ஜெட் குழு எடைகளும், குழுக் குறியீட்டு எண்களும் கீழே உள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடைகளுக்கு ஏற்ப, வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணை உருவாக்குக.

குழு	1960 ஜனவரியில் குறியீட்டு எண்	எடைகள்
உணவு	152	48
விளக்கும் எரிபொருளும்	110	5
உடை	130	10
வீட்டு வாடகை	100	12
இதர இனங்கள்	80	15

அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட குறியீட்டு எண்ணின் முக்கியத்துவத்தையும் பயனையும் பற்றி ஆய்வுரை வழங்குக. (செ.ப.)

5. ஒரு குறியீட்டு எண் திருப்திப்படுத்தவேண்டிய சோதனைகள் யாவை?

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தின் துணைகொண்டு, ஒரு குறியீட்டு எண் உருவாக்குக.

இனம்	ஒரு மூலஅளவையில் விலை		அளவுகள்	
	1960	1965	1960	1965
	ரூ.பை.	ரூ.பை.		
1.	9.20	15.00	5	5
2.	8.00	12.00	10	11
3.	4.00	5.00	6	6
4.	1.00	1.25	4	8

(செ.ப.)

6. குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கும் பல முறைகளை விளக்குக. (செ.ப.)

7. ஒரு குறியீட்டு எண்ணைக் கணிக்கும்போது பெருக்குச் சராசரியினை, சராசரிகளில் ஒருவகையாகக் கொள்வதில் உள்ள சிறப்பியல்புகளை விளக்குக. குறியீட்டு எண்களை உருவாக்குவதற்கு, ஃபிஷர் குறியீட்டு எண்ணே மிகுந்த தகுதி வாய்ந்தது என்பதனை விளக்குக.

வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்கள் எவ்வாறு கணிக்கப்படுகின்றன? (செ.ப,)

8. நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டு எண்ணிற்கும், அடிப்படைச் சங்கிலித்தொடர் குறியீட்டு எண்ணிற்குமுள்ள வேறுபாட்டினைச் சுட்டிக்காட்டுக. கீழ்க்காணும் நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டு எண்களிலிருந்து அடிப்படைச் சங்கிலித்தொடர் குறியீட்டு எண்களைக் காண்க.

ஆண்டு	1965	1966	1967	1968	1969
நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டு எண்	425	446	457	480	496

(செ.ப.)

9. பொதுவான விலை நிலைக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணை உருவாக்கும்போது எடை பெறும் பங்கினை விளக்கமாக விவாதிக்கவும். (செ.ப.)

10. 'குறியீட்டு எண்கள் பொருளாதார அழுத்தமானி களாக உள்ளன' — இந்தக் கூற்றை விளக்குக. மேலும், பிரசுரிக்கப்படும் குறியீட்டு எண்களைப் பயன்படுத்து வதில் கையாளவேண்டிய கவனமுறைகளை விளக்குக. (செ.ப.)

11. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து வாழ்க்கைத்தர எண்ணோடு வரவினை மெலிவாக்குக (deflate). மெய்யான வரவுகள் எவ்வாறு மாறுகின்றன என்பதை ஆய்க.

ஆண்டு	மாத வருமானம் (ரூபாயில்)	வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்
1966	400	100
1967	500	150
1968	600	250
1969	700	300
1970	800	400

(செ.ப.)

12. குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கும்போது எழும் பிரச்சினைகளைப் பற்றி ஒரு குறிப்பு எழுதுக. (செ.ப.)

13. வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டெண்ணைப் பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு எழுதுக. (செ.ப.)

14. ஒரு சராசரி தொழிலாள வகுப்பினரது குடும்ப பட்ஜெட்டின் குழு எடைகளும், குழுக் குறியீட்டு எண்களும் பின் தரப்பட்டுள்ளன. கொடுக்கப்

பட்டுள்ள எடைகளுக்கு ஏற்ப, வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணைக் காண்க.

குழு	குறியீட்டு எண்	எடை
உணவு	352	48
எரிபொருள், விளக்கு	220	10
உடை	230	8
வாடகை	160	12
இதர இனங்கள்	190	15

(ஐ.எ.எஸ்.)

15. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு ஃபிஷர் இலட்சியக் குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக:

பண்டங்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை (ரூபாயில்)	அளவு (மணுவில்)	விலை (ரூபாயில்)	அளவு (மணுவில்)
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24

அக்குறியீட்டெண், காரணிமாற்றுச் சோதனையையும், காலமாற்றுச் சோதனையையும் திருப்திப்படுத்துகின்றதா எனப் பார்க்க. (அ.ப,)

16. உற்பத்தியாளர்களால் பெறப்பட்ட சராசரி விலைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	கோதுமை	கார்ன்	ஓட்	பார்லி	உருளைக் கிழங்கு	சர்க்கரை வள்ளிக் கிழங்கு
1913	80	69	39	54	69	73
1915	93	66	45	54	50	79
1934	87	79	52	72	42	64

மேற்கண்ட பட்டியலைப் பயன்படுத்தி, 1913ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்டு, 1915, 1934ஆம் ஆண்டுகளுக்கு ஃபிஷர் இலட்சியக் குறியீட்டு எண்களைக் காண்க. (செ.ப.)

17. கீழ்க்காணும் இரு புள்ளிவிவரத்தொடர்களை, 1957ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்ட குறியீட்டு எண்களாக மாற்றுக. அவற்றை வரிப்படத்தில் வரைந்து காட்டி ஒப்பிடுக.

ஆண்டு	கூலி (ரூபாயில்)	
	சாதாரண வேலை	கைதேர்ந்த வேலை
1957	1.12	3.00
1958	1.25	3.12
1959	1.50	3.50
1960	2.00	4.00
1961	2.12	4.50
1962	2.25	5.00
1963	2.50	5.75

(அ.ப.)

11. காலத்தொடர்கள்

பல்வேறு வகைப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களில், மிகுந்த அளவில் வெளியிடப்படுபவற்றுள் **காலத்தொடர்கள்** (Time Series) ஒன்ருகும். மழை அளவு, உற்பத்தி, பண்டங்களின் விலை அல்லது குறியீட்டு எண், வங்கிகளில் குவியும் முதலீடுகள், பண்டங்களின் ஏற்றுமதி, இறக்குமதிகள், பண்டங்களின் விற்பனை அளவு, கால்நடை, மக்கள் எண்ணிக்கை போன்ற மாறிகள் காலத்திற்குக் காலம் மாறுபடும் தன்மையன. காலத்தின் பல்வேறு அடுத்தடுத்த இடைவேளைகளில் ஒரு மாறி பெறும் மதிப்புகளை, எண் அளவு படுத்திஞல், ஒரு காலத்தொடர் பெறப்படும். காலம், முழு ஆண்டுகளாகவோ அரை, கால் வருடங்களாகவோ, மாதங் களாகவோ, வாரங்களாகவோ நாட்களாகவோ தரப் பட்டிருக்கும். காலத்தொடர்கள், வரலாற்றுத் தொடர்கள் (Historical Series) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஏதோ ஒரு மாறி அல்லது ஒருசில மாறிகளின் சேர்க்கையமைப்பின் எண் அளவு மதிப்புகள் கால இடைவெளி ஒழுங்கில் (Chronological order) தரப்பட்டால் அது ஒரு காலத்தொடரெனக் கூறலாம். இத்தகு காலத்தொடர்கள் பொருளாதார, வணிகத் துறைகளில் பெரிதும் கையாளப்பட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன

காலத்தொடர்களின் இயல்பு

ஒரு மாறியின் மதிப்பு மாறுவதாலேயே காலத்தொடர்கள் உருவாகின்றன. இம் மாறுதல்கள் எதஞல் ஏற்படுகின்றன? பல்வேறு காரணங்களால் மாறி தன் மதிப்பில் வேறுபாடு அடைகின்றது. அவை இயற்கையாக ஏற்படும் மாறுதல்களாக இருக்கலாம்; அல்லது அம்மாறி இயங்கும் கூட்டங்களின் அமைப் புத்தன்மையாயிருக்கலாம்; அல்லது பொதுவான சமுதாய, பொருளாதார மாற்றங்களால் அத்தகு மாற்றங்கள் ஏற்பட லாம். இம் மாறுதல்களைத் தொடும் தூண்டு கருவிகள், மாறுதல் களைக் குறைந்தகால மாறுதல்களாக (Short Term Variations) ஏற்படுத்தலாம். எனவே, பல்வேறுபட்ட காரணங்களால் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் மாறியின் மதிப்பில் மாறுதல் ஏற்படுகிறது என்பது தெளிவாகும்.

காலத்தொடரைப் பாகுபடுத்தல்

கடந்த காலத்தில், ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் எம்முறையில் மாறுபடுகின்றன என்பதைக் காலத்தொடரிலிருந்து மேல்நோக்காக அறியலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வியாபார அமைப்பில், நிகழ்ந்த வியாபாரத்தின் நிலையை ஒரு காலத்தொடர் மேல்நோக்காகக் காட்டும். அதிலிருந்து அவ்வியாபாரம் எதிர்காலத்தில் தழைக்குமா? விரிவடையுமா? அல்லது அதன்நிலை சீர்படாமல் நட்டத்திற்கு இழுத்துச் செல்லுமா? என்பதை அது மேல்நோக்காகக் காட்டும். ஆனால், இத் தொடர்களை ஆழ்ந்து ஆய்ந்து எதிர்காலத்திற்கு வேண்டிய முறையில் திட்டமிட வேண்டுமானால், காலத்தொடர்களைப் பகுத்துணர்தல் (Analysis) வேண்டும். ஒரு தொழிற்கூடத்திலுள்ள நிர்வாகிகளும், மார்க்கெட் மானேஜர்களும் எதிர்காலத்திற்குத் திட்டமிட்டுச் செயலாற்றும் பல்வேறு துறைகளிலுள்ளவர்களும் காலத்தொடர்களைப் பகுத்துணர்ந்து அறிதல்வேண்டும். ஒரு வியாபாரக் கூடத்தின் கடந்த கால வியாபார நிலையைக் காட்டும் காலத்தொடரைத் திறமையாகப் பகுத்துணர்ந்தால், அது எதிர்காலத்தில் அவ்வியாபாரம் செல்லும் போக்கை (Trend) மிகத் தெளிவாகக் காட்டும். வீணுகப் பண்டங்களைச் சேர்த்து வைக்காமலும், மூலதனத்தை முடக்கி வைக்காமலும் எதிர்காலத்தில் வியாபாரத்தைச் செம்மையாக மேற்கொள்ள அது பயன்படும். எதிர்காலத்தில் வியாபாரத்தில் விற்பனைக் குறைவுநிலையை அப் பகுத்துணர்தல் காட்டுமானால், தகுந்த நேரத்தில் தகுந்த அளவையில் எதிர்காலத்தில் வியாபார நிலையைத் தெரிந்துகொள்ளும் நிலை ஏற்படுவதால், ஏற்படவிருக்கும் இக்கட்டான நிலைகளைச் சமாளிக்க முன்கூட்டியே தகுந்த ஏற்பாடுகளைச் செய்துகொள்ள இது உதவும். சுருக்கமாகக்கூறின், எதிர்காலத்தில் ஒரு மாறியின் நிலையை முன்கூட்டியே தீர்மானிக்கக் காலத்தொடர்களின் பகுத்துணர்தல் பயன்படுகிறது. பகுத்துணர, முதலில் காலத்தொடர் போக்கின் தன்மையை ஆயவேண்டும்.

போக்கின் வகைகள்

ஒரு காலத்தொடர் சுட்டிக்காட்டும் மாறியின் மதிப் போக்கினை நான்கு வகையாகப் பிரிக்கலாம். அவை ...களின் (1) பொதுப்போக்கு (The General Trend or Secular T... ...யாவன: அடிப்படைப்போக்கு அல்லது நீண்டகாலப் போ... ...rend) இதனை Long Time Trend) எனவும் அழைக்கலாம். (2) ப... ...க்கு (Basic or ...கள் (Seasonal Variations); (3) வளையப்போ... ...ருவகால மாறுதல் ...க்கு (Cyclical Movements); (4) ஒழுங்கற்ற போக்கு (Irregular Movements).

பொதுவான போக்கு

ஒரு காலத்தொடரில், நீண்ட காலத்திற்குப் பொதுவான மேல்நோக்கு அல்லது கீழ்நோக்கு நிலை காணப்பட்டால் அதனைப் பொதுவான போக்கு எனக் கூறுகிறோம். ஒரு தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில், குறைந்த கால அளவில் உற்பத்தி அளவில் ஏற்றத் தாழ்வுகள் காணப்பட்டாலும், நீண்டகால நோக்கில் உற்பத்தி யின் அளவில் நிதானமான முன்னேற்றமிருப்பதைக் காணக் கூடும். ஒவ்வொரு நாளும் வெப்பநிலையைக் காட்டும் வரிப்படம் நடுப்பகலில் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பையும், இரவில் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பையும் காட்டும்; ஆனால், 6 அல்லது 7 மாதங்களுக்கு வரையப்பட்ட அத்தகைய ஒரு வரிப்படம் வெப்பநிலையில் நிதானமான ஏற்றத்தை அல்லது இறக்கத்தைக் காட்டும். கோடைகாலத்தை நோக்கிச் செல்லுகின்ற பருவத்தில் அது நிதானமாக ஏறுவதையும், பனிக்காலத்தை நோக்கிச் செல்லு கின்ற பருவத்தில் அது நிதானமாக இறங்கி வருவதையும் காண லாம். இத்தகைய போக்குகள், பொதுவான அல்லது நீண்ட காலப் போக்குகளாகும். எனவே, நீண்டகாலப் பருவமொன்றில், ஒரு மாறியின் மதிப்பு மெதுவாகவும் நிதானமாகவும் ஏறும் அல்லது இறங்கும் நிலையைக் காட்டுவதே, பொதுவான அல்லது நீண்டகாலப் போக்காகும். இது ஓர் ஒழுங்கான (regular) போக்காகும். பொதுவான நீண்டகாலப் பருவமென்பதை 15 அல்லது 20 ஆண்டுகள் எனக்கொள்ளலாம்.

நீண்ட காலப்போக்கு – முதல் முறை

எனவே, ஒரு காலத்தொடரில் நீண்டகாலப் போக்கினை அறிய, குறைந்த காலங்களில் ஏற்படும் மாறுதல்களை நீக்க (Eliminate) முயலவேண்டும். இதனை அறிய மூன்று வெவ்வேறு வழிகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

(1) **வரிப்பட முறை** : இம் முறையால், ஒரு வரிப் படத்தில் x அச்சில் காலங்களையும் y அச்சில் மாறியின் மதிப்பு களையும் எடுத்துக்கொண்டு, காலமதிப்பிற்கேற்ற வெவ்வேறு புள்ளிகளை வரிப்படத்தில் குறிக்கின்றோம். இப் புள்ளிகளின் வழியாக ஒரு மெல்லிய வளைகோட்டினை வரைகிறோம். எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் மிகமிக நெருக்கமாக இவ்வளைகோடு செல்லும். வளைகோடு செல்லும் போக்கினை இது காட்டும். நீண்டகாலப் போக்கினை அறிய மிகத் துல்லியமான முறை இதுவன்று. எனி னும், மேல்நோக்காக நீண்டகாலப் போக்கினை அறிய இது பயன்படுகிறது.

நீண்ட காலப்போக்கு – இரண்டாம் முறை

(2) **நகரும் சராசரிகள் முறை** : ஒரு குறிப்பிட்ட சம கால இடைவெளிகளைக்கொண்ட ஒரு காலத்தொடரில் இம் முறை பயன்படுகிறது. இம் முறையில், கொடுக்கப்பட்ட காலத்தொடர், வேறொரு காலத்தொடராக மாற்றியமைக்கப்படுகிறது. இனங்களைப் பல சம இனங்கள்கொண்ட குழுக்களாக எடுத்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் சராசரி எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. இம் முறையில் தொடர்ந்து ஒவ்வொரு குழுவாக எடுத்துக்கொண்டு சராசரிகள் காணப்படுவதில்லை. அதற்குப் பதிலாக, தொடக்கத்தில் ஓர் இனத்தை விட்டுவிட்டு, முடிவில் ஓர் இனத்தை எடுத்துக் கொண்டு அக்குழுவிலுள்ள இனங்களுக்குச் சராசரி காண்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக,

1940	10
1941	12
1942	14
1943	16
1944	18
1945	19

என ஒரு காலத்தொடரின் பகுதி அமைந்தால், சராசரிகளைக் காண (10, 12, 14), (16, 18, 19) என்ற குழுக்களாக அமைக்காமல், (10, 12, 14), (12, 14, 16), (14, 16, 18), (16, 18, 19)................என்றவாறு குழுக்கள் அமைக்கப் பட்டு, ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் கூட்டுச் சராசரி காணவேண்டும். இங்கு மூன்றைக் கால இடைவெளியாகக்கொண்டு, ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் மூன்று மதிப்புகளை எடுத்துள்ளோம்; இதுபோன்றே, 4 அல்லது 5-ஐக் கால இடைவெளியாகக்கொண்டு, முறையே 4 அல்லது 5 மதிப்புகளைக்கொண்ட குழுக்கள் அமைத்து, அக் குழுக்களின் நகரும் சராசரிகளைக் (Moving Averages) காணலாம். அடுத்தடுத்துள்ள இரு மீப்பெரு மதிப்புகள் அல்லது மீச்சிறு மதிப்புகளின் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள காலத்தை ஒரு காலஇடைவெளி (Period) எனக்கொண்டால், கொடுக்கப் பட்டுள்ள காலத்தொடரில் சராசரிக்கால இடைவெளியை நகரும் சராசரிகளைக் கணிக்க எடுத்துக்கொள்ளப்படும் இனங்களின் எண்ணிக்கையாகக் கொள்ளலாம்.

புள்ளிவிவரங்கள் காட்டும் கால வட்ட ஒழுங்குடைய தன்மையைப் (Periodicity) புறக்கணிப்பதே இம் முறையின் நோக்கமாகும். எனவே, கால இடைவெளித் தன்மையைக் காட்டாத தொடருக்கு இம் முறை பொருந்தாது. நகரும்

சராசரிகளைக் கணக்கிடும்போது, வெவ்வேறு இடைவெளி எண்ணிக்கைகளை எடுத்துக்கொள்வதற்கு இது வாய்ப்பளிக்கிறது; எனவே, வெவ்வேறு போக்குக்கோடுகள் பெறப்படுவதற்கு வாய்ப்புண்டு என்பதை நாம் அறியவேண்டும். சராசரிகளைக் கணிக்க எடுத்துக்கொள்ளப்படும் இனங்களின் எண்ணிக்கைதான் இம் முறையில் சிறப்பானதும், நபருக்கு நபர் மாறுபடக்கூடிய தொன்றும் ஆகும். எனினும், மேற்சொல்லப்பட்டுள்ள வழியைக் கையாண்டு, நகரும் சராசரிகளைக் காண, இனங்களின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்கவேண்டும். நகரும் சராசரிகளைத் தீர்மானித்துப் பட்டியலில் எழுதும்போது, 3 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளை 2-வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுத ஆரம்பிக்க வேண்டும்; 4 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளை 2-வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுதவேண்டும்; 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளை 3-வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுதவேண்டும். இது, நகரும் சராசரிகளை மையப்படுத்தும் வழியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

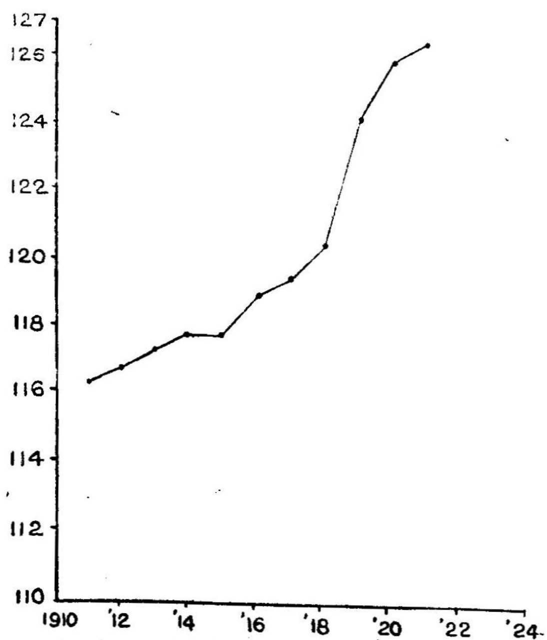
ஒரு பண்ட வருட உற்பத்தியின் குறியீட்டு எண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	குறியீட்டு எண்	ஆண்டு	குறியீட்டு எண்
1910	114	1917	117
1911	116	1918	121
1912	118	1919	120
1913	117	1920	124
1914	116	1921	132
1915	118	1922	128
1916	120	1923	122

(அ) மேற்கண்ட புள்ளிவிவரத்திற்கு 4 ஆண்டு நகரும் சராசரியைப் பொருத்துக **(அ.ப.)**

(ஆ) நகரும் சராசரி வரிப்படம் வரைந்து காட்டுக.

ஆண்டு	குறியீட்டு எண்	4 ஆண்டு மொத்தம்	4 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள்
1910	114	—	—
1911	116	465	116.25
1912	118	467	116.75
1913	117	469	117.25
1914	116	471	117.75
1915	118	471	117.75
1916	120	476	119.00
1917	117	478	119.50
1918	121	482	120.50
1919	120	497	124.25
1920	124	504	126.00
1921	132	506	126.50
1922	128	—	—
1923	122	—	—



நகரும் சராசரி—படம் 15.

எடுத்துக்காட்டு

30 ஆண்டுகளில் ஒரு பண்டத்தின் மொத்த விற்பனை விலையின் குறியீட்டு எண்களைக் கீழ்க்காணும் காலத்தொடர் காட்டுகிறது. நகரும் சராசரி முறையில் போக்கினைக்காண எடுத்துக்கொள்ள வேண்டிய கால இடைவெளி யாது?

1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910
116	108	102	111	114	126	119	115	119	128
1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920
135	132	126	123	135	146	139	135	131	140
1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930
148	147	144	140	151	162	155	152	148	162

மீப்பெரும் விலைக் குறியீட்டு எண்கள் 1901, 1906, 1910, 1911, 1916, 1921, 1925, 1926, 1930ஆம் ஆண்டுகளில் நிகழ்கின்றன. மீப்பெருமதிப்புகள் ஏறத்தாழ, 1901, 1906, 1911, 1916, 1921, 1926ஆம் ஆண்டுகளில் நிகழ்வதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, நகரும் சராசரி முறைக்கு எடுத்துக் கொள்ளவேண்டிய கால இடைவெளி 5 ஆண்டுகளாகும். எனவே, 5 ஆண்டுகளுக்கு நகரும் சராசரிகள் காணவேண்டும்.

நீண்ட காலப்போக்கு – மூன்றும் முறை

(3) ஒரு காலத்தொடரின் நீண்டகாலப் போக்கினை அறிய 'மிக்க் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை' கையாளப்படுகிறது. கால இடைவெளி குறிப்பிடாதபோது, நகரும் சராசரி முறையைக் கையாளமுடியாது. அங்கெல்லாம் மிகக் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை முறையால் வளைகோடுகளைப் பொருத்திப் போக்கு காணப்படுகிறது. வளைகோடு பொருத்தலை ஏற்கெனவே தனி அத்தியாயத்தில் விரிவாக விளக்கியுள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு

1955–64ஆம் ஆண்டுகளுக்கு ஒரு நகரத்தின் தொழிற் சாலைகளில் வேலைவாய்ப்பினைக் காட்டும் கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தின் போக்கினைக் காண்க:

ஆண்டு	1955	'56	'57	'58	'59	'60	'61	'62	'63	'64
வேலை பார்ப்பவர்கள் (இலட்சக் கணக்கில்)	3.2	3.3	3.7	3.9	3.6	4.3	4.8	4.8	5.3	6.4

(ம.ப.)

இதற்கு ஒரு நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்திப் போக்கினைக் காண்போம்.

x	y	x^1	$X=2x^1$	X^2	Xy
1955	3.2	−4.5	−9	81	−28.8
'56	3.3	−3.5	−7	49	−23.1
'57	3.7	−2.5	−5	25	−18.5
'58	3.9	−1.5	−3	9	−11.7
'59	3.6	−0.5	−1	1	−3.6
		→ 0			
'60	4.3	0.5	1	1	4.3
'61	4.8	1.5	3	9	14.4
'62	4.8	2.5	5	25	24.0
'63	5.4	3.5	7	49	37.8
'64	6.3	4.5	9	81	56.7
மொத்தம்	43.3		0	330	51.5

இயல் சமன்பாடுகள்

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma \times y$$

$$m \Sigma x + n c = \Sigma y$$

(அ-து) $330\, m = 51.5$

$10\, c = 43.3$

எனவே, $m = 0.156;\ c = 4.33.$

$\therefore$ நேர்க்கோடு: $y = 0.156\, X + 4.33$

குறிப்பு

இதுபோன்ற கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு காலத்தொடருக்கு, பரவளையம், இலாகிருதமிக் வளைகோடுகள் போன்ற பிற வளை கோடுகளையும் பொருத்தலாம்.

பருவகால மாறுதல்கள்

நீண்டகாலத் திட்டங்களுக்கு, எதிர்கால நிலைகளைத் தீர்மானிக்க, நீண்டகாலப்போக்கு மிகவும் பயன்படுத்தப்படுகிறது எனக் கண்டோம். ஆனால், குறுகியகாலத் திட்டங்களுக்குச் செயல்படு முறைகளுக்கும், கட்டுப்பாட்டுக் காரியங்களுக்கும், பருவகால மாறுதலை விளக்கும் போக்கினைக் காண்பது அவசியம்.

ஓர் ஆண்டின் பருவகால மாறுபாட்டால், காலநிலை மாறுபாட்டால், ஒரு மாறியின் மதிப்புகளில் மாறுதல்கள் ஏற்படுகின்றன. அறுவடைக் காலங்களில் தானியங்களின் விலை குறைவதும், பின்பு மெதுவாக விலை ஏறுவதையும் காணலாம். ஓர் ஆண்டில், அறுவடை அல்லது உற்சவங்கள் போன்ற காரணங்களால் ஒரு மாறியின் மதிப்பு குறுகிய காலத்தில் ஏறி, இறங்குகின்ற மாறுதல் நிலையை **பருவகால மாறுதல்கள்** (Seasonal Variation) எனக் கூறுகின்றோம்.

எனவே, ஒரு காலத்தொடரில் பருவகால மாறுதல்களைக் காணுகின்றபோது நீண்டகாலப் போக்கினைப் புறக்கணிக்க வேண்டும்; குறுகியகால மாறுதல்களை ஆயவேண்டும். பருவகால மாறுதல்களை ஆய, கீழ்க்காணும் வழிமுறைகள் கையாளப்படுகின்றன.

(1) எளிய சராசரி முறை (Method of Simple Averages); வாரந்தோறும் அல்லது மாதந்தோறும் அல்லது கால் வருடந்தோறும் சராசரிகள் காணுதல்.

(2) போக்குவிகித முறை (Ratio-to-trend Method);

(3) நகரும் சராசரிகள் முறை (Moving Average Method);

(4) இணைப்பு இணைவீதங்கள் முறை (Link Relatives Method).

எளிய சராசரி முறை

இம் முறையினைக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் தொடருக்குச் சராசரிக் காலமாறுபாட்டினைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆண்டு	கால்வருட உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
1924	30	81	62	119
1925	33	104	86	171
1926	42	153	99	221
1927	56	172	129	235
1928	67	201	136	302

(அ.ப.)

ஆண்டு	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றாம் கால் வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1924	30	81	62	119
1925	33	104	86	171
1926	42	153	99	221
1927	56	172	129	235
1928	67	201	136	302
மொத்தம்	228	711	512	1,048
பருவகாலச் சராசரிகள்	45.6	142.2	102.4	209.6

$$\text{பருவகாலக் குறியீட்டு எண்} = \frac{\text{கால் வருடச் சராசரி}}{\text{பொதுச் சராசரி}} \times 100$$

$$\text{இங்கு, பொதுச் சராசரி} = \frac{45.6 + 142.2 + 102.4 + 209.6}{4}$$

$$= \frac{499.8}{4} = 124.95$$

$$\text{முதல் பருவ காலக் குறியீட்டு எண்} = \frac{45.6}{124.95} \times 100 = 36.49$$

இரண்டாம் கால்வருடப் பருவகாலக் குறியீட்டு எண்

$$= \frac{142.2}{124.95} \times 100 = 113.8$$

மூன்றும் கால் வருடப் பருவகாலக் குறியீட்டு எண்

$$= \frac{102.4}{124.95} \times 100 = 81.93$$

நான்காம் கால் வருடப் பருவகாலக் குறியீட்டு எண்

$$= \frac{209.6}{124.95} \times 100 = 167.7$$

எனவே, 36.49, 113.8, 81.93, 167.7 என்ற எண்கள் எளிய சராசரி முறையில் பருவகால மாறுபாட்டுப் போக்கினைச் சுட்டிக்காட்டுகின்றன. இரண்டாம், நான்காம் கால் வருடப் பருவங்களில் இது ஏறியுள்ளது; முதல், மூன்றும் கால் வருடப் பருவங்களில் இது இறங்கியுள்ளது என அறியலாம்.

போக்கு விகித முறை

போக்குவிகித முறையைக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரங்களுக்குப் போக்குவிகித முறையில் பருவகால மாறுதல்களைக் காண்க.

ஆண்டு	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றும் கால் வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1960	30	40	36	34
1961	34	52	50	44
1962	40	58	54	48
1963	54	76	68	62
1964	80	92	86	82

(ஆ.ப.)

ஆண்டு	ஆண்டு மொத்தம்	நடுநிலையிலிருந்து விலக்கம் x	ஆண்டுச் சராசரி y	xy	x^2	Y_t
1960	140	−2	35	−70	4	32
1961	180	−1	45	−45	1	44
1962	200	0	50	0	0	56
1963	260	1	65	65	1	68
1964	240	2	85	170	4	80
மொத்தம்			280	120	10	

நேர்க்கோடு: $Y = mx + c$

$$c = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{280}{5} = 56$$

$$m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{120}{10} = 12$$

∴ நேர்க்கோடு $Y = 12x + 56$

இங்கு, m = வருடமாறுதல் = 12.

∴ கால் வருடமாறுதல் = 3.

5 ஆண்டுகளின் போக்குமதிப்புகள் (Trend Values) Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 எனில்,

$Y_1 = 12(-2) + 56 = 32$
$Y_2 = 12(-1) + 56 = 44$
$Y_3 = 12(0) + 56 = 56$
$Y_4 = 12(1) + 56 = 68$
$Y_5 = 12(2) + 56 = 80$

இனி, கால் வருட மதிப்புகளைக் காணவேண்டும். 1960-ற்கு வருடப்போக்கு மதிப்பு 32 ஆகும். இது நான்கு பருவங்களின் மைய நிலையாகும். எனவே,

முதல் கால் வருடப்போக்கு மதிப்பு $= 32 - \frac{3}{2}(3) = 27.5$
இரண்டாம் கால் வருடப்போக்கு மதிப்பு $= 32 - \frac{1}{2}(3) = 30.5$
மூன்றும் கால் வருடப்போக்கு மதிப்பு $= 32 + \frac{1}{2}(3) = 33.5$
நான்காம் கால் வருடப்போக்கு மதிப்பு $= 32 + \frac{3}{2}(3) = 36.5$

இது போன்றே, மற்றைய ஆண்டுகளுக்கும் போக்கு மதிப்புகள் கணித்துக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் அமைக்கப்படுகிறது.

கால் வருடப்போக்கு மதிப்புகள்

ஆண்டு	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றும் கால்வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1960	27.5	30.5	33.5	36.5
1961	39.5	42.9	45.5	48.5
1962	51.5	54.5	57.5	60.5
1963	63.5	66.5	69.5	72.5
1964	75.5	78.5	81.5	84.5

கால் வருடப்போக்கு மதிப்புகளை, போக்கு மதிப்புகளின் சதவீதங்களாக அமைப்பு

ஆண்டு	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றும் கால் வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1960	109.1	131.1	107.5	93.1
1961	86.1	122.4	109.9	90.7
1962	77.7	106.4	93.9	79.3
1963	85.0	114.3	97.8	85.5
1964	106.0	117.1	105.5	97.00
மொத்தம்	463.9	591.3	514.6	445.6
சராசரி	92.78	118.26	109.92	89.12
பருவகாலக் குறியீட்டு எண்	92.0	117.4	102.1	88.4

நகரும் சராசரி முறை

இம் முறையினை நீண்டகாலப் போக்கினில் கண்டோம். பருவகால மாறுதல்களைக் காண இம் முறை எங்ஙனம் பயன் படுகிறது என்பதைக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்கு வோம்.

எடுத்துக்காட்டு

நகரும் சராசரிகளின் முறைப்படி, கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குப் பருவகால மாறுபாட்டுப் போக்கினைக் காண்க.

ஆண்டு	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றும் கால் வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1960	30	40	36	34
1961	34	52	50	44
1962	40	58	54	48
1963	54	76	68	62
1964	80	92	86	82

(க.ப.)

ஆண்டும் பருவகாலங் களும்		தொடர்	4-நகரும் கூட்டல்	3-வது நிரலின் 2-வது நகரும் கூட்டல்	போக்கு மதிப்புகள் = 4-வது நிரல் / 8	போக்கு விலக்கம் = நிரல் 2 − நிரல் 5	பருவகாலப் பகுதிக் கூறுகள்	திருத்தப்பட்ட காலத் தொடர் = நிரல் 2 + நிரல் 7	எஞ்சிய ஒழுங்கற்ற மாறுதல் = நிரல் 8 − நிரல் 5
1		2	3	4	5	6	7	8	9
1960	I	30	..	..	..	..	..	..	..
	II	40	..	..	..	..	..	..	..
	III	36	140	284	35.5	0.5	−1.2	34.8	−0.7
	IV	34	144	300	37.5	−3.5	6.3	40.3	+2.8
1961	I	34	156	326	40.8	−6.8	4.5	38.5	−2.3
	II	52	170	350	43.8	8.2	−9.6	42.4	−1.4
	III	50	180	366	45.8	4.2	−1.2	48.8	+3.0
	IV	44	186	378	47.3	−3.3	6.3	50.3	+3.0
1962	I	40	192	388	48.5	−8.5	4.5	44.5	−4.0
	II	58	196	416	52.0	6.0	−9.6	48.4	−3.6
	III	54	220	434	54.3	−0.3	−1.2	52.8	−1.5
	IV	48	214	446	55.8	−7.8	6.3	54.3	−1.5
1963	I	54	232	478	59.8	−5.8	4.5	58.5	−1.0
	II	76	246	506	63.3	12.7	−9.6	66.4	+3.1
	III	68	260	546	68.3	−0.3	−1.2	66.8	−1.5
	IV	62	286	588	73.5	−11.5	6.3	68.3	−5.2
1964	I	80	322	622	77.8	2.2	4.5	84.5	+6.7
	II	92	320	660	81.3	10.7	−9.6	82.4	+1.1
	III	86	340	..	..	..	..	..	..
	IV	82	..	..	..	..	..	..	..

மேற்கண்ட பட்டியலில், 3, 4, 5, 6-ஆவது நிரல்களை எவ்வாறு கணக்கிடுவதென்பதை, அவற்றின் நிரல் தலைப்புகளிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம். 7-வது பிரிவாகிய பருவகாலப் பலன்களுக்குத் திருத்தங்கள் கண்டவிதம் வருமாறு: தற்போது, பருவகாலப் பாதிப்புகளைக் காணக் கீழ்க்காணும் பட்டியலைக் காண்க. 6-வது பிரிவில் கண்ட மதிப்புகளை ஆண்டு கொடுக்கும் பருவகாலங்களுக்கேற்ப எழுதப்பட்டுள்ளன. பின் கூட்டப்பட்டு, சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. இந்தச் சராசரிகளின் கூடுதல் பூச்சியமாக இருத்தல் நலம். ஆனால், இது,

$$\left\{\begin{array}{l} 9.4 + 1.025 = 10.425 \\ -4.725 - 6.525 = -11.25 \end{array}\right\} -0.825$$ ஆக உள்ளது. எனவே

இந்தச் சராசரிகளுடன் $+\dfrac{0.825}{4} = +\ 0.206$-யைச் சேர்த்து முதல் தசமஸ்தானத்திற்குத் திருத்திக்கொண்டு எழுத வேண்டும். மீண்டும் திருத்தப்பட்ட சராசரிகளின் கூடுதல் பூச்சியமாகின்றதா எனக் கவனிக்கவும். பூச்சியமாகாவிடில், இந்த நான்கு எண்களும் சேர்த்துப் பூச்சியமாகுமாறு ஒன்றன் மதிப்பைத் திருத்திக்கொள்ள வேண்டும். இங்கு, -4.5, $+9.6$, $+1.2$, -6.3 என்ற மதிப்புகள் திருத்தப்பட்ட சராசரிகளாகப் பெறப்படுகின்றன. எனவே, பருவகாலப் பலன்களைப் புறக் கணிக்க, 2ஆவது நிரலின் மதிப்புகளோடு $+4.5$, -9.6, -1.2, $+6.3$ என்பனவற்றை முறையே நான்கு கால்ஆண்டுகளுக்கு 7-வது நிரலில் மதிப்புகளாகும்.

ஆண்டு	பருவங்கள்			
	முதல் கால் வருடம்	இரண்டாம் கால் வருடம்	மூன்றும் கால் வருடம்	நான்காம் கால் வருடம்
1960			+0.5	−3.5
1961	−6.8	+8.2	+4.2	−3.3
1962	−8.5	+6.0	−0.3	−7.8
1963	−5.8	+12.7	−0.3	−11.5
1964	+2.2	+10.7		
மொத்தம்	−18.9	+37.6	+4.1	−26.1
சராசரி	−4.725	9.4	1.025	−6.525
திருத்தப்பட்ட சராசரி	−4.5	9.6	1.2	−6.3

இணைப்பு இணை விகிதமுறை அல்லது **இணைப்பு சார்பு விகிதமுறை**

இம் முறை இணைப்பு இணைவிகிதங்களை அல்லது சார்பு விகிதங்களை (Link relatives) அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது மற்ற முறைகளைவிடச் சற்று சிக்கலானது. இதனைக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு இணைப்பு இணைவிகித முறையால் பருவகால மாறுதல்களுக்குரிய குறியீட்டு எண்களைக் காண்க.

ஆண்டு	கால்வருட மதிப்புகள்			
	I	II	III	IV
1971	35	40	40	40
1972	40	30	25	30
1973	35	40	35	40

இணைப்பு இணை விகிதங்கள்

1971	—	$\frac{40}{35} \times 100 = 114.3$	$\frac{40}{40} \times 100 = 100$	$\frac{40}{40} \times 100 = 100$
1972	$\frac{40}{40} \times 100 = 100$	$\frac{30}{40} \times 100 = 75$	$\frac{25}{30} \times 100 = 83.3$	$\frac{30}{25} \times 100 = 120$
1973	$\frac{35}{30} \times 100 = 116.7$	$\frac{40}{35} \times 100 = 114.3$	$\frac{35}{40} \times 109 = 87.5$	$\frac{40}{35} \times 100 = 114.3$
இடைநிலை	108.35	114.3	87.5	114.3
சங்கிலித்தொடர் இணைவிகிதம்	100	$\frac{100 \times 114.3}{100} = 114.3$	$\frac{87.5 \times 114.3}{100} = 99.4$	$\frac{114.3 \times 99.4}{100} = 113.6$
திருத்தப்பட்ட சங்கிலித்தொடர் இணைவீதங்கள்	100	$114.3 - -5.77$ 108.53	$99.4 - 2 \times 5.77 = 87.86$	$113.6 - 3 \times 5.77 = 96.29$
பருவகாலக் குறியீட்டு எண்கள்	100	$\frac{108.53 \times 100}{100} = 108.53$	$\frac{87.86 \times 100}{100} = 87.86$	$\frac{96.29 \times 100}{100} = 96.29$

சங்கிலி இணைவிகிதங்களின் திருத்த எண்:

முதல் கால் வருடத்தின் சங்கிலித்தொடர் இணைவிகிதம் = 100 4-வது கால் பருவத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டு முதல் கால் பருவத்தின் சங்கிலித்தொடர் இணைவிகிதம் =

$$\frac{108.35 \times 113.6}{100} = 123.09$$

வேறுபாடு $= 123.09 - 100 = 23.09$. கால் வருடப்போக்கின் அதிகம் $= \frac{23.09}{4}$ 5.77. திருத்தப்பட்ட சங்கிலித்தொடர் இணை விகிதங்களின் சராசரி $= \frac{100 + 108.53 + 87.86 + 96.29}{4}$

$$= \frac{392.68}{4} = 98.17.$$

வளையப்போக்கு

ஒரு காலத்தொடரில், நீண்டகாலப்போக்கு, பருவகால மாறுதல்கள், வளையப்போக்கு, ஒழுங்கற்ற மாறுதல்கள் ஆகிய வற்றை முறையே T, S, C, E என்ற எழுத்துகளாலும், காலத்தொடரை O என்ற எழுத்தாலும் குறிப்பிடுவோம். எனில்,

$$O = T_x\ S_x\ C_x\ E \qquad \text{ஆகும்.}$$

இந்த நான்கு மாறுதல்களின் பெருக்கல் உறவே காலத்தொடராகும் என்ற அனுமானத்தில் இது பெறப்படுகிறது. எனவே, $O = T_x\ S_x\ C_x\ E$ என்பதாயிருப்பதால், வளைய ஒழுங்கற்ற போக்கினைப்பெற T-யையும் S-யையும் நீக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{T_x\ S_x\ C_x\ E}{C_x\ E} = C_x\ E$$

$C_x\ E$ என்பது புள்ளியியல் நகரும் சராசரி முறையால் பகுத்துணரப்படுகிறது. இந்த முறையில், முதலில் போக்கு மதிப்புகளைப் பருவகாலக் குறியீட்டு எண்களால், பெருக்கிக் கொள்ளவேண்டும். பின், இது வளையப்போக்குத் தொடராலும் ஒழுங்கற்ற போக்குத் தொடராலும் இணைந்த நிலையில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலத்தொடர் பிரிக்கப்படுகிறது. பின் $C_x\ E$ புள்ளிவிவரத்திலிருந்து, ஒழுங்கற்ற போக்கினை நீக்க, $C_x\ E$ -யிலிருந்து நகரும் சராசரி முறை கையாளப்பட்டு, எஞ்சிய தொடராக C பெறப்படுகிறது.

ஒழுங்கற்ற மாறுதல்கள்

$E = \frac{C_x\, E}{C}$ ஆகப் பெறப்படுகிறது. இந்த முறையால், $C_x\ E$ தொடரிலிருந்து E-யினை முழுமையாகப் பிரிக்க முடியாது. காலத்தொடர் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து வளையமாறுதல்களை முழுமையாக நீக்கமுடியாது. எனினும், இம் முறைதான் ஒழுங்கற்ற மாறுதல்களின் போக்கை ஆயப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பயிற்சி

1. (அ) ஒரு காலத்தொடரை (i) போக்கு; (ii) பருவ கால மாறுதல்கள்; (iii) ஒழுங்கற்ற மாறுதல்கள் என்ற மூன்று அங்கங்களாகப் பகுத்துணரலாம் என்பதை விவரிக்க.

   (ஆ) பருவகால மாறுதல்களுக்கும் வளைய மாறுதல்களுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினை விளக்கிக் காட்டுக. (செ.ப.)

2. நகரும் சராசரிகள் பற்றி ஒரு சிறுகுறிப்பு வரைக. (செ.ப.)

3. ஒரு காலத்தொடர் என்றால் என்ன? பருவகால மாறுதல்கள், வளைய மாறுதல்கள், ராண்டம் (ஒழுங்கற்ற) மாறுதல்கள் பற்றிய வேறுபாடுகளை விளக்குக. அவைகளின் ஆதிக்கத்தைப் புறக்கணிக்கக் கையாளப்படும் ஏதேனும் ஒரு வழிமுறையை விளக்குக. (செ.ப.)

4. நீண்டகாலப் போக்கினைப் பற்றிக் குறிப்பு வரைக. (செ.ப.)

5. காலத்தொடரின் பாகுபடுத்தல் என்றால் என்ன என்பதை விளக்குக. தொழிற்சாலைகளில் அதன் முக்கியத்தை விவாதிக்க. (செ.ப.)

6. வளையமாறுதல்கள் குறித்துச் சிறுகுறிப்புத் தருக.

7. மாதாந்திரக் குறியீட்டு எண்களின் நீண்டகாலப் போக்கை மிகக் குறைந்த வர்க்கமுறையால் காணும் முறையை விளக்குக. (செ.ப.)

8. **கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு, போக்கைக்காட்டும் நேர்க்கோட்டைக் காண்க. அதன்மூலம், 1926ஆம் ஆண்டிற்குரிய எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக் காண்க.**

ஆண்டு	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925
உற்பத்தி (டன்னில்)	110.2	143.3	143.3	134.5	138	55	74	129	150	140

(செ.ப.)

9. ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி (ஆயிரம் மணுக்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

ஆண்டு	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
உற்பத்தி	80	90	92	83	94	99	92

இப் புள்ளிவிவரங்கள் எத்தனை அளவிற்கு ஏறுகின்ற அல்லது இறங்குகின்ற போக்கினைக் காட்டுகிறது? (செ.ப.)

10. பருவகாலக் குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கும் வழிமுறையினை விளக்குக. (செ.ப.)

11. பருவகால மாறுதல்களை அளக்கப் பயன்படும் இணைப்பு இணைவிகித வழிமுறையை விளக்குக. இதே காரியத்திற்குப்பயன்படும் வேறுமுறைகளோடு இதனை ஒப்பிடுக. (செ.ப.)

12. கீழ்க்காணும் தொடருக்குச் சராசரி பருவகால நகருதலைக் கணக்கிடுக.

கால்வருட உற்பத்தி

ஆண்டு	I	II	III	IV
1924	3.5	3.9	3.4	3.6
1925	3.5	4.1	3.7	4.0
1926	3.5	3.9	3.7	4.2
1927	4.0	4.6	3.8	4.5
1928	4.1	4.4	4.2	4.5

(அ.ப.)

13. 10 ஆண்டுகளில் ஆந்திராவில் ஒரு மாவட்டத்தில் உற்பத்தியான அரிசி அளவு (டன்னில்) கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	உற்பத்தி
1950	11,200
1951	12,300
1952	10,600
1953	13,400
1954	13,800
1955	14,500
1956	11,600
1957	14,300
1958	13,600
1959	15,400

3 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி, அம் மாவட்டத்தில் அரிசி உற்பத்தியின் போக்கைச் சுட்டிக் காட்டுக. (ஆ.ப.)

12. இந்திய நாட்டுப் புள்ளி விவரங்கள்

மக்கள் ஒன்றுபட்டு, சமுதாயங்களை உருவாக்கி ஓர் ஆட்சியின் கீழ் உட்பட்டு வாழத்தொடங்கிய நாளிலிருந்து, மக்களைப் பற்றிய, மக்கள் தொடர்புகொண்டுள்ள ஆடுமாடுகள், தொழில்துறைகள் இன்னபிற பற்றிய புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்தும், அதனை ஆய்வதும், எதிர்காலத்திற்குத் திட்டமிடுவதும் இன்றியமையாத செய்கைகளாக இருந்து வருகின்றன. இந்திய நாட்டிலும் மிகப் பழைமையான காலத்திலிருந்து புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆயப்பட்டு வருகின்றன. மகாபாரதத்தில்கூட நாட்டின் படைகளைப் பற்றிய புள்ளிவிவரம், உற்பத்திப் புள்ளிவிவரம், பிறப்பு இறப்புப் பற்றிய புள்ளிவிவரம் போன்ற விவரங்கள் பேசப் படுகின்றன. சாணக்கியர் அர்த்தசாஸ்திர நூலும், புள்ளி விவரங்களைச் சுட்டிக்காட்டிப் பேசுகிறது. கிரேக்கத் தூதுவர் மக்ஆர்தர் எழுதிய நூல்களிலும் இந்தியப் புள்ளிவிவரங்கள் பற்றிய செய்திகள் காணப்படுகின்றன. எனவே, மிகமிகப் பண்டைக் காலத்திலிருந்தே இந்திய நாட்டில் புள்ளிவிவரங்கள் கையாளப்பட்டு வந்துள்ளன என்பது தெளிவாகும். நவீன காலத்தில் ஒரு நாட்டின் அரசாங்கத்திற்கு, அந்நாட்டின் (1) மக்கள்தொகை (Population Census); (2) தொழில் புள்ளிவிவரம் (Labour Statistics); (3) விவசாயப் புள்ளிவிவரம் (Agricultural Statistics); (4) தொழிற்கூடப் புள்ளிவிவரம் (Industrial Statistics); (5) வணிகப் புள்ளிவிவரம் (Trade Statistics); (6) நிதிப் புள்ளிவிவரம் (Financial Statistics); (7) விலைப்புள்ளி விவரம் (Price Statistics) முதலியன வேண்டற்படுகிறது. பிரிட்டிஷ் இந்தியாவிலும், சுதந்திர இந்தியாவிலும் இத்தகு புள்ளிவிவரங்கள் அரசாங்கத்தின் பல்வேறு துறைகளால் சேகரிக் கப்பட்டும் ஆயப்பட்டும் வந்தன; வந்துகொண்டிருக்கின்றன.

பிரிட்டிஷ் இந்தியாவில் புள்ளி விவரம்

இந்திய நாட்டை ஆங்கிலேயர்கள் கைப்பற்றி, ஒரே ஆட்சியின்கீழ் ஏக இந்தியாவாக ஆள முற்பட்டகாலத்தில்,

அரசாங்கப் புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு போன்ற ஈடுபாடுகள் அதிகரிக்கத் தொடங்கின. மக்கள் எண்ணிக்கைக் கணிப்பு முறையும் தொடங்கப்பட்டது. முதன்முதலாக 1881ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகைக் கணிப்பு அரசாங்கத்தால் மேற்கொள்ளப்பட்டது. அப்போது பல்வேறு மாகாணங்களில் விவசாய இலாக்காக்கள் தொடங்கப்பட்டு, விவசாய உற்பத்திப் புள்ளிவிவரமும் சேகரிக்கத் தொடங்கப்பட்டது. 1895ஆம் ஆண்டு, புள்ளிவிவரப் பொது இயக்குநர் ஒருவரைப் புள்ளியியல் தலைவராக அரசாங்கம் நியமித்தது. நாட்டின் விவசாய, வணிக, பிற பொருளாதாரத் துறைகளின் பல்வேறு வகையான புள்ளிவிவரங்களை அவரது அலுவலகங்கள் சேகரித்து ஆயத்தொடங்கின. 1905ஆம் ஆண்டு பொதுப் புள்ளியியல் இயக்குநருக்குப் பதிலாக வணிக ஆய்வு, புள்ளிவிவர இயக்குநர் தலைவர் (Director General) அலுவலகம் நிறுவப்பட்டது. ஆங்கில ஆட்சியில், இந்தியப் புள்ளிவிவர நிலைக்கு மூலகாரணமாக அமைந்தது 1862ஆம் ஆண்டில் ஆங்கில அரசால் உருவாக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரக்குழு எனக் கூறலாம். ஆங்கில ஆட்சியில் அடங்கிய எல்லா நாடுகளிலும் பல்வேறு துறைகளில் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்க இக்குழு முயன்றது. இக்குழு சேகரித்த புள்ளிவிவரங்கள் அரசாங்கத்தால் வெளியிடப்பட்டன. முதன்முதலாக, 1868ஆம் ஆண்டில் 'பிரிட்டிஷ் இந்தியாவின் புள்ளிவிவரச் சுருக்கம்' (Statistical Abstract of British India) என்ற ஓர் ஏடு வெளியிடப்பட்டது. 1866ஆம் ஆண்டில், சென்னை மாகாணத்தில் பல்வேறு துறைகளின் புள்ளிவிவரங்களை வெளியிட ஓர் இந்திய கெஜட் வெளியீடு ஒன்று ஆரம்பிக்கப்பட்டது. பின்பு, 1881ஆம் ஆண்டில் மக்கள்கணிப்பு மேற்கொள்ளப்பட்டு புள்ளிவிவரங்கள் வெளியிடப்பட்டன. 1886ஆம் ஆண்டில் பிரிட்டிஷ் இந்தியாவின் 'விவசாயப் புள்ளிவிவரங்கள்' என்ற ஒரு வெளியீடு பிரசுரிக்கப்பட்டது. 1925ஆம் ஆண்டில் பொருளாதார ஆய்வுக்கமிட்டி ஒன்று நிறுவப்பட்டு, அப்போது சேகரிக்கப்பட்ட பல்துறைப் புள்ளிவிவரங்கள் போதுமானதா? இல்லையெனில் சேகரிக்கும் தளத்தை எவ்வாறு விரிவுபடுத்தவேண்டுமென ஆய்ந்தது. இந்தியப் பொருளாதாரக் கணிப்பிற்குரிய புள்ளிவிவரத்தைச் சேகரித்து ஆய, 1934ஆம் ஆண்டில் பௌலி இராபர்ட்சென் குழு அமைக்கப்பட்டது. அக் குழுவின் பரிந்துரைப்படி 1936ஆம் ஆண்டில் மத்திய புள்ளிவிவர நிறுவனம் (Central Statistical Organisation) ஒன்று நிறுவத் தீர்மானிக்கப்பட்டு, பல்வேறு காரணங்களால் இது இயலாமற்போகவே, இக் கழகம் 1951ஆம் ஆண்டில்தான் சுதந்திர இந்தியாவில் நிறுவப்பட்டது.

சுதந்திர இந்தியாவில் புள்ளி விவரம்

ஆங்கில அரசாங்கத்தாரால் தொடங்கப்பட்ட பல்வேறு புள்ளி விவர நிறுவனங்கள், இந்திய சுதந்திர அரசாங்கத்தாலும் தொடர்ந்து நிர்வகிக்கப்பட்டு வருகின்றன. பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை மக்கள்தொகைக் கணிப்பு எடுக்கப்பட்டு வருகிறது. அண்மையில், 1971ஆம் ஆண்டு மக்கள்தொகைக் கணிப்பு வெற்றிகரமாக மேற்கொள்ளப்பட்டது. மக்கள்தொகைக் கணிப்பு பற்றிப் பின்னர் தனியாகவும் விரிவாகவும் காண்போம். சுதந்திர இந்தியாவில், ஐந்துஆண்டுத் திட்டங்கள் உருவாக்கப்பட்டு, நம் நாட்டைச் சமுதாய, பொருளாதார நிலைகளில் உன்னத நிலைக்குக் கொண்டுவர அனைத்து முயற்சிகளும் மேற்கொள்ளப்பட்டு வருகின்றன. இம் முயற்சிகளுக்கு அடித்தளமாக அமைந்துள்ள பல்வேறு துறைப் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கப் பல கழகங்களும், குழுக்களும், நிறுவனங்களும் ஏற்படுத்தப்பட்டன. 1947ஆம் ஆண்டில் தரைப்படைப் புள்ளிவிவர நிறுவனம் (The Army Statistical Organisation) உருவாக்கப்பட்டது. 1948ஆம் ஆண்டு மக்கள்தொகைக் கணிப்பிற்குப் பொதுப்பதிவாளர் தலைமையகம் நிரந்தரமாக்கப்பட்டு, பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறை தவறாது மக்கள்தொகைக் கணிக்கப்பட்டு வருகிறது. அதே ஆண்டில், மத்திய உணவு, விவசாய இலாகாவின் கீழ்ப் பொருளாதாரப் புள்ளியியல் இயக்குநர் அலுவலகம் உருவாக்கப்பட்டது. அவ்வலுவலகம், விவசாய உணவுத்துறையில் பல்வேறு புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்து, ஆய்ந்து, அவைகளை வெளியிட்டு வருகிறது. மத்திய அரசாங்கத்தின் பல்வேறு புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு ஆய்வுப் பணிகளுக்கு மிகத் துணையாக நின்றவர்களில், பேராசிரியர் மஹாலனோபிஸ் என்பார் தலைசிறந்தவராவர். அன்னார் ஒரு சிறந்த புள்ளியியல் அறிஞர். இவரது திறமையைப் பயன்படுத்த, மத்திய அரசாங்கம் அன்னாரை 1951ஆம் ஆண்டில் மத்திய அரசாங்கப் புள்ளியியல் ஆலோசகராக நியமித்தது. பின்னர், இவர் திட்டக்குழுவின் உறுப்பினராகவும் சிறந்த பணியாற்றியுள்ளார்.

மத்திய அரசாங்கத்தின்கீழ் பல்வேறு துறைகளில் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்து, ஆய்ந்து வருகின்ற அலுவலகங்கள் வருமாறு:

(1) பொதுப்பதிவாளர் அலுவலகம் — மக்கள்கணிப்பு நிறுவனம்.

(2) வணிக ஆய்வுப் புள்ளிவிவரப் பொது இயக்குநர் அலுவலகம் — வணிக இலாகா.

(3) தொழிலாளர் நிறுவனம் (Labour Bureau) — தொழிலாளர், வேலைவாய்ப்பு, அகதி பரிமாற்ற இலாகா.

(4) பொருளாதாரப் புள்ளிவிவர இயக்குநர் அலுவலகம் — உணவு, விவசாய இலாகா.

(5) தரைப்படைப் புள்ளிவிவர நிறுவனம் — பாதுகாப்பு இலாகா.

(6) தேசியக்கூறு ஆய்வு மேற்கொள் அலுவலகம் — மந்திய அமைச்சரவைச் செயலகம்.

(7) மத்திய புள்ளிவிவர நிறுவனம் — மத்திய அமைச்சரவை அலுவலகம்.

(8) புள்ளிவிவர நிறுவனம் — தபால், தந்தி துறைகள்.

இத் துறைகள் அனைத்தையும் இணைத்து இந்திய மந்திய அரசாங்கத்தின் அமைச்சரவைச் செயலகத்தில் இயங்கும் பொருளா தாரத்துறை டில்லியில் இயங்கி வருகிறது.

இவைகளைத் தவிர, ஒவ்வோர் இராச்சிய அரசாங்கமும் பல்வேறு புள்ளிவிவர நிறுவனங்களையும், குழுக்களையும் கொண்டு பலதரப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்து ஆய்கின்றன.

மத்திய, இராச்சிய அரசாங்கப் புள்ளிவிவரங்களைத் தவிர, அரசாங்க மானியம் பெற்ற, பெறாத தனியார் நிறுவனங்கள் சில இந்தியாவில் இயங்கிவருகின்றன. அவற்றுள், கல்கத்தாவில் உள்ள 'இந்தியப் புள்ளிவிவர நிறுவனம்' (The Indian Statistical Institute) தலைசிறந்ததாகும். இது 1932ஆம் ஆண்டில் நிறுவப்பட்டது. ஆண்டு ஒன்றுக்கு ரூ. 238 மட்டும் செலவின மாகக்கொண்டு தொடங்கிய இந் நிறுவனம் இன்று ஆண்டு ஒன்றுக்கு இரண்டுகோடி ரூபாய் பட்ஜெட் செய்து இயங்கிப் பெரும் பணியாற்றி வருகிறது. இதன் பணிகள், மத்திய அரசாங்கத் திற்கும், மற்றைய இராச்சிய அரசாங்கங்களுக்கும் சிறந்த முறை யில் உறுதுணையாக அமைந்து வருகின்றன. வங்காளத்திலும், ஒரிஸாவிலும் வெள்ளக்கட்டுப்பாட்டுப் பணிக்கு இந் நிறுவனம் புள்ளிவிவரத் துறையில் பணியாற்றி மிகவும் உதவியது. தாமோ தர் பள்ளத்தாக்கு, ஹீராகட் அணைக்கட்டுத் திட்டங்களுக்கும், குறுகியகால வெள்ளக்கட்டுப்பாட்டு முறைகளை வகுத்துக் கொடுத்தது இந் நிறுவனமேயாகும். நாட்டின் திட்டக்குழுவோடு இந்நிறுவனம் துணைநின்று பணியாற்றுகிறது. இரண்டாவது

ஐந்தாண்டுத் திட்ட அமைப்பிற்கு இந் நிறுவனம் பெரிதும் உழைத்து ஒத்துழைத்தது. தேசிய சிறுகூறு ஆய்வுகளை அவ்வப் போது இந் நிறுவனம் மேற்கொள்கிறது. வங்காள இராச்சியத்தில் விவசாய உற்பத்தியைப் பெருக்க, புள்ளிவிவர ஆய்வினை இந் நிறுவனம் அவ்வப்போது மேற்கொண்டு வருகிறது. புள்ளிவிவரத் தரக்கட்டுப்பாடு (Statistical Quality Control) முறைகளையும் இது கையாண்டு பல தொழிற்கூடங்களில் பயிற்றுவித்து வருகிறது. புள்ளிவிவர மேற்கல்வி, டாக்டர்பட்டக் கல்வி, புள்ளிவிவர உயர் ஆய்வுக் கல்வி முதலியனவற்றையும் இது நடாத்தி வருகிறது. இதன் அலுவலகத்தில், 1953ஆம் ஆண்டில் மின்விசையால் இயங்கும் கணிப்புமானிகள் (Computers) நிறுவப்பட்டுப் பயன் படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. 'சங்கியர்' (Sankhya) என்ற மாதாந்திர இதழையும் இந்நிறுவனம் வெளியிடுகிறது. இது போன்றே பூனாநகரத்திலும் ஒரு நிறுவனம் இயங்கி வருகிறது.

மேலும், இவற்றைத் தவிர, ரிஸர்வ் வங்கியில் ஆய்வுத் துறையின்கீழ், வங்கிகளின் செயல்முறைகள் பற்றிய பல்வேறு புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆயப்பட்டு வருகின்றன. இப் புள்ளிவிவரங்களைக் கீழ்க்காணும் ரிஸர்வ் வங்கி வெளியீட்டு இதழ்களில் காணலாம்.

(1) பணத்தாள், நிதி பற்றி அறிக்கை — ஆண்டிதழ்.

(2) இந்தியாவில் வங்கிகளின் வளர்ச்சிப் போக்கு பற்றிய அறிக்கை — ஆண்டிதழ்

(3) இந்திய ரிஸர்வ் பேங்கின் செய்திச் சுருள்—மாதஇதழ்.

(4) இந்தியாவில் கூட்டுறவுச் சங்கங்களின் ஆய்வறிக்கை — ஆண்டிதழ்.

(5) இந்திய வங்கிகளின் புள்ளிவிவரப் பட்டியல்கள் — ஆண்டிதழ்.

இனி, இந்திய விவசாய ஆராய்ச்சிக் கவுன்சில் (I. C. A. R.) என்ற கழகம் மிகச் சிறப்பான புள்ளிவிவரம் என்பதும் இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது. விவசாயத்தைப்பற்றி, இராயல் கமிஷன் செய்த பரிந்துரைப்படி 1928ஆம் ஆண்டில் இது நிறுவப் பட்டது. இது விவசாயத்தைச் சார்ந்த பொருளாதாரத் துறைகளில் நல்ல பல ஆராய்ச்சிகளை மேற்கொண்டு செயல்பட்டு வருகிறது. குறிப்பாகத், தானிய விளைவினை மதிப்பிட ராண்டம் கூறுமுறைகளை இது பயன்படுத்துகிறது. இது, பிற கல்வி நிலையங்களைப்போல, புள்ளிவிவரக் கல்வி பயிற்றுவிக்கும் கல்விக்

கூடமாகவும் பணியாற்றி வருகிறது. வேறு புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பு, ஆய்வு நிறுவனங்கள் வருமாறு:

(1) டில்லியில் உள்ள பொருளாதார வளர்ச்சி நிறுவனம் (The Institute of Economic Growth, New Delhi).

(2) டில்லியில் உள்ள பயன்படும் பொருளாதார ஆய்வுக்கான தேசீய கவுன்சில் (National Council of Applied Economic Research, New Delhi).

(3) டில்லியில் உள்ள பயன்படுத்தப்படும் மனித சக்தி ஆய்விற்கான நிறுவனம் (The Institute of Applied Man Power Research, New Delhi).

(4) பம்பாயில் உள்ள தொழிலாளர் பற்றிய ஆய்வு நிறுவனம் (The Institute of Labour Research, Bombay).

(5) பூனாவில் உள்ள அரசியல் பொருளாதார கோகலே நிறுவனம் (The Gokhale Institute of Politics and Economics, Poona).

(6) டில்லியில் உள்ள அந்நிய நாட்டு வணிக நிறுவனம் (The Institute of Foreign Trade, New Delhi).

இந்திய நாட்டுப் புள்ளி விவரங்களின் சிறப்புகளும் குறைகளும்

நாட்டின் நலன்கருதி, நாட்டினைச் சமுதாய, பொருளாதார நிலைகளில் முன்னேற்றப் பல்வேறு முயற்சிகள் மேற்கொள்ளப் படுகின்றன; திட்டங்கள் வகுக்கப்படுகின்றன. அம்முயற்சிகளுக்கும், திட்டங்களுக்கும் மேலே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ள பல்வேறு மத்திய, இராச்சிய அரசாங்கப் பிரிவுகளும், அரசாங்க, தனியார் நிறுவனங்களும் சேகரிக்கும் புள்ளிவிவரங்களும், ஆய்வுகளும் கொஞ்சமன்று. அவைகள் செய்யும் பணி மிகச் சிறந்ததொன்றாகும். எந்தப் பெருமுயற்சிக்கும் திட்டத்திற்கும் புள்ளிவிவரமே தலையான கருவியாகும். அதனை அடித்தளமாகக் கொண்டுதான், பிறவற்றைக் கட்டுதல் இயலும். புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறையில் பல்வேறு தொல்லைகள் உள்ளன; பின்பு ஆய்வுநிலையிலும் எண்ணற்ற இக்கட்டுகள் உள்ளன. இந்தியப் புள்ளியியல், கணக்கியல், பொருளாதார நிபுணர்கள் மற்றைய எந்த நாட்டினரையும்விட திறமையில் தாழ்ந்தவரன்று என்பதற்குச் சான்றாக, எத்தனையோ செயல்கள் அமைந்துள்ளன. ஆய்வுக் கட்டத்தில் பெரும் பிழைகள் நிகழ்வதில்லை. இந்திய நிறுவனங்களின் ஆய்வுகள் போற்றத்தக்க நிலையில் சிறப்பாக அமைந்துள்ளன. ஆனால், புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கும் கட்டத்தில், நாம் இன்னும் முன்னேறவேண்டும். மக்கள் கணிப்புப்

புள்ளிவிவரத்தில் சேகரிப்பாளர்களாக உள்ளவர்கள் ஆரம்பப் பள்ளி ஆசிரியர்களே. அவர்கள் அறிந்தும், அறியாமலும் செய்யும் பிழைகள் புள்ளிவிவரத்தினை, இறுதியாகத் திட்டப்பலன்களை மிகவும் பாதிக்கின்றன. நாட்டின் உணவு உற்பத்திப் புள்ளி விவரங்களுக்கு நாம், கிராமக் கர்ணத்தையே நம்பியுள்ளோம். அவரே மூலச் சேகரிப்பாளர் ஆவார். அவர் செய்யும் பிழைகள் நமது திட்டத்தையும், முயற்சியையும் பாதிக்கும். துரதிர்ஷ்டவசமாக, நாட்டின் பலஹீனமான பொருளாதார நிலையில், ஆரம்பப்பள்ளி ஆசிரியர்களும், கிராமக் கர்ணங்களும் மிக உயர்கல்வி பெற்றவர்களல்லர்; உரிய ஊதியமும் பெறுபவர் களல்லர். அவர்களின் நிலை, கல்வியாலும் ஊதியத்தாலும் உயர்ந்து, அவர்கள் பணி மிகச் சிறப்பாக அமைந்தால்தான் நிபுணர்கள் மேற்கொள்ளும் திட்டமுயற்சிகள் வெற்றிபெறும். நாம் மேற்கொள்ளும் புள்ளிவிவர முறையில் இன்னொரு முக்கிய குறையினை இங்குச் சுட்டிக்காட்டுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, கல்கத்தா புள்ளிவிவரக் கழகம் அடிக்கடி தேசீயக்கூறு ஆராய்ச்சிகளை நடத்தி முடிவினைத் தருகிறது. ஆனால், புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கும், ஆராய்ச்சி முடிவுகளை வெளியிடுவதற்கும் சில துறைகளில் சில தருணங்களில் நீண்டகாலம் எடுத்துக்கொள் கிறார்கள். வேலைவாய்ப்புப் பற்றிய புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பினை 1970-ல் ஆரம்பித்து 1975-ல் முடிவினையும், பரிவுரையையும் வெளி யிட்டால், 1975-ல் நிலை மிகவும் மாறுபட்டு விடுவதால், அந்த ஆய்வு எந்தவிதப் பயனுமளிக்காமல் போய்விடுகிறது. எனவே, புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பிலும் ஆய்விலும் காலம் தாழ்த்தாமல் மிகத் துரிதமாகவும் விறுவிறுப்பாகவும் பல்வேறு புள்ளியியல் நிறுவனங்கள் இயங்கவேண்டும். மனித சக்தியையும், மனித மூளையையும் மட்டும் நம்பியிராமல் மின்கணிப்புக் கருவிகளையும் (Computers) பயன்படுத்தி வேகமாகவும் விரைவாகவும் செயல் படவேண்டும். இனி, பல்வேறு துறைகளால் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை இணைக்கும் முறை, பல்வேறு துறைகளில் ஆற்றப்படும் பணிகளின் இணைப்பு போதிய அளவிற்கு இல்லாமல் போய்விடுகின்றன; இதனால், புள்ளிவிவரங்களின் சேகரிப்பும் ஆய்வும் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதோடு, பணம் விரயமாகிறது. இந்நிலை தவிர்க்கப்படவேண்டும். ஒரு துறை சேகரித்து ஆய்ந்த ஒருவகைப் புள்ளிவிவரத்தை, மற்றொரு துறையினர் காலத்தை யும், பணத்தையும் விரயம்செய்து மேற்கொள்ள வேண்டுவதில்லை. புள்ளிவிவரச்சேகரிப்பு ஆய்வுமுறைகளில் மத்திய அரசும், இராச்சிய அரசுகளும் இணைந்து செயல்படவேண்டும். பல்வேறு துறை களுக்கும், நிறுவனங்களுக்கும் நல்லதோர் உடன்தொடர்பு (Co-ordination) இருத்தல்வேண்டும்.

இந்தியாவில் மக்கள் கணிப்பு

இந்தியாவில் மக்கள் கணிப்பு, பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை நடைபெறுகிறது. 1881 பிப்ரவரி, 1891 பிப்ரவரி, 1901 மார்ச்சு, 1911 மார்ச்சு, 1921 மார்ச்சு, 1931 பிப்ரவரி, 1941 பிப்ரவரி, 1951 பிப்ரவரி, 1961 பிப்ரவரி, 1971 மார்ச்சு என வரிசையாக இது மேற்கொள்ளப்பட்டது.

மக்கள் கணிப்புத் தொடங்குவதற்கு ஏறத்தாழ ஓர் ஆண்டிற்கு முன்பே அதற்கான முயற்சிகளை, மத்திய அரசாங்கத்தால் நியமிக்கப்படும் மக்கள்கணிப்புத் தலைமை அலுவலர் (Census Commissioner, India) மேற்கொள்வார். அன்னாரின்கீழ் பல மத்திய, இராச்சிய அரசாங்க ஊழியர்கள் பணிபுரிவர். இதற்கு அச்சாணி போன்றவர்கள் சேகரிப்பாளர்களாவர். பள்ளி ஆசிரியர்களும், பல அலுவலக எழுத்தர்களும் இப் பணியினை ஊதியமின்றி மேற்கொள்கின்றனர். இவர்களுக்கு ஊதியம்தர அரசாங்கப் பொருளாதார வளம் இடம் தராது. மில்லியனுக்கு மேற்பட்ட சேகரிப்பாளர்கள் செயல்படுவர். மக்கள்கணிப்புச் சட்டப்படி, சேகரிப்பாளர்களுக்குத் தகுந்த விடைகளைத் தருவதற்கு மக்கள் அனைவரும் கடமைப்பட்டவர்களாவர். அவர்களது விடைகள் இரகசியமாக வைத்துக் கொள்ளப்படும்; வழக்கு மன்றங்களில் அவைகள் சாட்சியமாகவோ, பிற செய்திகளாகவோ ஏற்றுக்கொள்ளப்படமாட்டா. இதனால் மெய்யான புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்க ஏதுவாகிறது. சேகரிப்பாளர்கள் செய்திகளைத் திரட்டுவதற்கேதுவாக, முன்பே ஒவ்வோர் இல்லத்திலும் ஏற்ற முறையில் வரிசையாக நுழைவாயில்களில் எண்கள் குறிக்கப்படும்.

மக்கள் கணிப்பின் குறிக்கோள் மக்கள்தொகையின் எண்ணிக்கை மட்டுமன்றி, மக்களின் வாழ்க்கையோடு இணைந்த பல்வேறு செய்திகளைச் சேகரிப்பதுமாகும்.

1951ஆம் ஆண்டு மக்கள் கணிப்பு வேலை, பிப்ரவரித் திங்கள் 9ஆம் தேதியிலிருந்து மார்ச்சுத் திங்கள் முதல்தேதி வரை நடந்தது. அப்போது ஒவ்வொரு குடிமகனிடமும் கேட்கப்பட்ட வினாப்பட்டியலின் சுருக்கம் வருமாறு:

1. பெயரும் குடும்பத் தலைவருடன் கூடிய உறவும் :
2. (அ) தேசியம் :
   (ஆ) சமயம் :
   (இ) சாதி :

3. திருமண நிலை :

4. வயது :

5. பிறப்பிடம் :

6. வேறு நாட்டிலிருந்து குடி பெயர்ந்தவரா? அதன் விவரம் :

7. தாய்மொழி :

8. அறிந்த பிற மொழிகள் :

9. பொருளாதார நிலை :

10. வேலை :

11. வாழ்க்கைக்குரிய முதல்தர வழி :

12. வாழ்க்கைக்குரிய இரண்டாம் தர வழி :

13. கல்வி :

14. அங்கவீனம் (தொழுநோய் பிடிப்பு) :

15. பால் :

1961ஆம் ஆண்டு மக்கள் கணிப்பு நடந்தபொழுது, மேற்கண்டது போன்ற தனிப்பட்ட வினாத்தாளுடன், வீட்டு வினாப் பட்டியலும், குடும்பவினாப் பட்டியலும் வழங்கப்பட்டுச் செய்திகள் சேகரிக்கப்பட்டன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. தனிப்பட்ட வினாத்தாளின் சுருக்கம் வருமாறு:

1. (அ) பெயர் :
   (ஆ) குடும்பத் தலைவருடனுள்ள உறவு :

2. வயது :

3. திருமணநிலை :

4. (அ) பிறப்பிடம் :
   (ஆ) பிறப்பிடம் நகர்ப்புறமா? நாட்டுப்புறமா? :
   (இ) தற்போதுள்ள இடத்தில் வசித்துவரும் காலம் :

5. (அ) தேசியம் :
(ஆ) சமயம் :
(இ) அரிஜன வகுப்பு அல்லது மலைவகுப்பைச் சார்ந்தவரா? :

6. படிப்பும் கல்வியும் :

7. (அ) தாய்மொழி :
(ஆ) வேறு தெரிந்த மொழிகள் :

8. உழவுத்தொழிலில் ஈடுபட்டவரா? :

9. உழவுத்தொழிலில் கூலிவேலை செய்பவரா? :

10. குடும்பத்தினைச் சார்ந்த தொழிற்சாலையில் வேலை செய்பவரா? :
(அ) அவ்வேலையின் தன்மை :
(ஆ) அத்தொழிற்சாலையின் தன்மை :
(இ) வேலைக்கு அமர்த்தப்பட்டவரா? :

11. வேறுவகை வேலையெனில்;
(அ) வேலையின் தன்மை :
(ஆ) வேலைசெய்யும் இடத் தன்மை :
(இ) தொழிலாளர் வர்க்கப் பிரிவு :
(ஈ) தொழிற்கூடத்தின் பெயர் :

12. வேலை எதுவும் இல்லையெனில் ஈடுபட்டுள்ள நிலை :

13. பால் :

வீட்டு விளுப்புட்டியல்

1. வீட்டின் பயன்படும் தன்மை :
2. சுவர்கள் கட்டப்பட்ட முக்கிய மூலப்பொருள்கள் :
3. கூரை கட்டப்பட்ட முக்கிய மூலப்பொருள்கள் :

4. சொந்தமானதா? வாடகையா? :

5. அறைகளின் எண்ணிக்கை :

கட்டடம் தொழிற்கூடமாக இருப்பின், வினுப் பட்டியல் வருமாறு:

1. பெயர் :

2. உரிமை :

2. உற்பத்திப் பொருள் :

4. தொழிலாளர் எண்ணிக்கை :

5. எரிபொருள் :

6. இயந்திரவகை முதலிய செய்திகள் :

குடும்ப விஞப்பட்டியல்

1. குடும்பத்தினரால் பயிர்செய்யப்படும் சொந்த நிலத்தின் பரப்பும், குத்தகை நிலத்தின் பரப்பும் :

2. பிறருக்குப் பயிரிட விடப்பட்ட நிலத்தின் பரப்பு :

3. பெறும் அல்லது கொடுக்கும் வாடகை :

4. குடும்பத் தொழிற்சாலையின் தன்மையும் விவரமும் :

1961ஆம் ஆண்டில் மக்கள் கணிப்பு எடுக்கப்பட்டபோழ்து, அதனுடன் இணைந்து, ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களின் பலன்களையும் பொருளாதார வளர்ச்சி நிலையையும் காணவேண்டி, வேறு சில துணை ஆய்வுகளும் மேற்கொள்ளப்பட்டன. அவையாவன:

1. அறிவியல், தொழில்திறமை கொண்டவர்களைப் பற்றிய ஆய்வு :

2. சமுதாய, பொருளாதார ஆய்வு :

3. கைத்தறி, கைவேலைப்பாட்டினைப் பற்றிய ஆய்வு :

4. மனித இனங்களைப் (Races) பற்றிய ஆய்வு :

1961ஆம் ஆண்டுக் கணிப்பில் கண்ட சில முக்கியச் செய்திகளாவன: 1961ஆம் ஆண்டு மக்கள்தொகை 439 மில்லியன்; அதில் 226 மில்லியன் ஆண்கள்; 213 மில்லியன் பெண்கள். மக்கள்தொகை 2.2 சதவீதத்தில் வளர்கிறது. இறப்புவீதம் 1951 ஆம் ஆண்டு நிலையைவிடக் குறைந்துள்ளது. எனவே, மக்கள் தொகை வளர்ச்சி அதிகமாகிறது. இந்தியனின் சராசரி வாழ்வுக் காலம் 45 ஆண்டுகள். இது 35-லிருந்து 45ஆக உயர்ந்துள்ளது. நகர்ப்புற மக்கள்தொகை ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் 60 மில்லியன் அளவில் 1951ஆம் ஆண்டுக் கணிப்புப்படி வளர்ந்து வந்தது. 1961ஆம் ஆண்டுக் கணிப்புப்படி 80 மில்லியன் அளவில் மாறியிருக்கும் நிலை, நாட்டுப்புறத்திலிருந்து நகர்ப்புறத்திற்கு மக்கள் நகருவதைக் காட்டுகிறது. மக்கள்தொகையின் மிக வேகமான வளர்ச்சி பொருளாதார வளர்ச்சியில் குறுக்கிட்டு, வாழ்க்கைத் தரம் முன்னேற முடியாமல் திணறுகிறது. அரசாங்கத்தின் குடும்பக் கட்டுப்பாட்டுத் திட்டங்களும் முயற்சிகளும் வெற்றி பெறுவதாகுக!

1971-மக்கள் கணிப்பு

1971ஆம் ஆண்டு இந்திய மக்கள் கணிப்பினில் கமிஷனரால் பயன்படுத்தப்பட்ட வினாப்பட்டியல் வருமாறு:

வினாப்பட்டியல்

1. பெயர் :
2. குடும்பத் தலைவருடன் உறவு :
3. பால் :
4. வயது :
5. மணநிலை (அ-து) திருமணம் ஆகாதவரா? விதவையா? மனைவியை இழந்தவரா? மணமுறிவு செய்து கொண்டவரா? மண வாழ்க்கையில் பிரிந்த நிலையில் உள்ளவரா? :
6. (மணமான பெண்களுக்கு மட்டும்) திருமணம்ஆன வயது; கடந்த ஒரு வருடத்தில் குழந்தை பெற்றவரா? :
7. பிறப்பிடத்தின் விவரம் (அ-து) அதன் பெயர், நகர்ப்புறமா?

நாட்டுப்புறமா? மாவட்டத்தின் பெயர், மாநிலத்தின் பெயர், நாட்டின் பெயர் :

8. கடந்த இருப்பிடத்தின் இத்தகைய விவரங்கள் :

9. இக்கணிப்பு சமயத்தில் வசிக்கும் கிராம (அ) நகரத்தில் வசிக்கும் கால அளவு :

10. சமயம் :

11. தாழ்த்தப்பட்ட சாதி, மலைச்சாதியைச் சார்ந்தவரா? :

12. கற்றவரா? இல்லை பிற நிலையில் உள்ளவரா? :

13. கற்றுத் தேர்ந்த உயர்ந்த கல்வித்தரம் :

14. தாய்மொழி :

15. வேறு தெரிந்த மொழிகள் :

16. முக்கிய அலுவல் :

உழவுத்தொழில், விவசாயம், தொழிற் கூடப் பணியாளர், குடிசைத் தொழில் அல்லது வேறுவகைத் தொழில் ஆகிய வற்றில் இருப்பவராயின், வேலைசெய்யும் இடம், தொழில்நிலையத்தின் பெயர், தொழிற்சாலையின் தன்மை, மாத ஊதி யம்பெறும் பணி, அலுவலகப் பணி, வேலையின்விவரம், பணியாளராக உள்ள தரநிலை (Status) (அ-து) பணியாள்களை நியமித்து வைத்திருப்பவர், பணியாள், தனி வேலையாள், குடும்பத்துடன் வேலை செய்பவர் :

பொருளாதார வருவாய்க்குரிய உழைப் பின்றி இருப்பவரா? குடும்ப வேலைகளில் ஈடுபட்டிருப்பவரா? மாணவரா? ஓய்வு பெற்ற பணியாளரா? வாடகைபெற்று வாழ்பவரா? பொருளாதாரத்திற்குப்

பிறரைச் சார்ந்து வாழ்பவரா? பிச்சைக் காரரா? சுற்றித் திரிபவரா? தர்ம சத்திரங்களில் வாழ்பவரா? வேலையில் லாத பிறரா? :

17. இரண்டாம்தர வேலை (எதுவுமிருப்பின்) :

இரண்டாம்தர வேலையைப் பற்றியும், 16வது வினாவில் தரப்பட்டவாறு விவரம் தரவும். குடும்பத் தலைவி, மாணவர், ஓய்வுபெற்ற பணியாள் என்பன போன்ற முதல்தர அலுவ லிருப்பினும், வேறு ஏதாவது இரண்டாம்தர வேலை கொண்டி ருப்பினும், அதன் விவரம் தரவும்.

சிறப்புப் புள்ளிவிவரம்

மக்கள் கணிப்பு ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகையைப் படம் பிடித்துக் காட்டுகிறது. ஆனால், மக்கள்தொகையின் இயக்கத் தைக் காட்டுவது **சிறப்புப் புள்ளிவிவரம்** (Vital Statistics) ஆகும். ஒரு நாட்டின் மக்கள்தொகை, பிறப்பாலும், இறப் பாலும், மக்கள் பிற நாட்டிற்குக் குடிபெயர்வதாலும், வெளி நாட்டு மக்கள் உள் நாட்டில் வந்து குடியேறுவதாலும் மாறு படுகிறது. எனவே, மக்கள்தொகைப் பதிவும், பிறப்பு இறப்புப் பதிவுகளும், குடியேற்ற அதிகரிப்பு, குறைவுப் பதிவுகளும் ஒரு நாட்டின் சிறப்புப் புள்ளிவிவரத்தைத் தருகின்றன. மக்கள் பெருக்கவளப் புள்ளிவிவரம் (The Fertility Statistics), மக்கள் பெருக்கவீதம் (The Total Fertility Rate), மக்கள்தொகை வளர் வீதம் (Reproduction Rate), இறப்பு வீதங்கள் (Mortality Rates), வாழ்க்கைப் பட்டியல்கள் (Life Tables) முதலியன சிறப்புப் புள்ளிவிவரத்தோடு இணைந்தவைகளாகும். வாழ்க்கைப் பட்டி யலைப் பயன்படுத்தித்தான் இன்ஷ்யூரன்ஸ் நிபுணர்கள் (Actuaries) இன்ஷ்யூரன்ஸ் பிரிமியத்தைக் கணக்கிடுகின்றனர்.

சமுதாய மக்கள் வாழ்க்கையில் பிறப்பு, இறப்பு, திருமணம், திருமண முறிவு, குடியிருப்பு இடப்பெயர்ச்சி முதலியன சிறப்பான நிகழ்ச்சிகள் (Vital Events) ஆகும். இந் நிகழ்ச்சிகளோடு இணைந்த மக்கள் எண்ணிக்கைப் புள்ளிவிவரங்கள்தாம் சிறப்புப் புள்ளிவிவரங்களாகும். நம் நாட்டில், கிராமந்தோறும், நகரம் தோறும் பிறப்பு, இறப்புப் பதிவேடுகள் வைக்கப்பட்டுப் பாது காக்கப்பட்டு வருகின்றன. அவைகளிலிருந்து இத்தகு நிகழ்ச்சி களின் புள்ளிவிவரங்களை அறியலாம். நாட்டின் மக்கள் கணிப்புப் பதிவேடுகளிலிருந்தும், ஒருசில சிறப்பு நிகழ்ச்சிப் புள்ளிவிவரங்

களைப் பெறமுடியும். மருத்துவ விடுதிகளில் குறித்துப் போற்றி வைக்கப்பட்டுள்ள ஏடுகளிலிருந்தும் இத்தகையப் புள்ளிவிவரங் களைப் பெறலாம்.

சிறப்புப் புள்ளிவிவரத்தோடு இணைந்த சிறப்பு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்வீதங்களைக் காண்பது சிறப்புப் புள்ளியியலில் பெரிதும் பயன்படுவதாகும். இத்தகு நிகழ்ச்சிகளில், முக்கியமான இறப்பு (Mortality), மக்கள்பெருக்க வளம் (Fertility) ஆகியவற்றை அளக்கப் பயன்படும் அளவைகளை இங்குக் காண்போம்.

இறப்பு வீதங்கள்

மக்கள் இறப்புகளை அளக்க, (1) குத்துமதிப்பான இறப்பு வீதம் (Crude Death Rate); (2) குறிப்பிட்ட மக்கள் பகுதியின் இறப்புவீதம் (Specific Death Rate); (3) தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதம் (Standardised Death Rate) என்பன அளவைகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

I குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம்

$$= \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட சமுதாய மக்கள்தொகையில் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த மக்கள்தொகை}} \times 1,000$$

எடுத்துக்கொண்ட குறிப்பிட்ட காலத்தின் நடுவில் அமையும் மக்கள்தொகையின் மதிப்பீட்டு எண்ணையே மொத்த மக்கள் தொகையின் எண்ணிக்கையாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

குத்துமதிப்பான இறப்புவீதத்தின் குறைகளும் நிறைகளும்:

(1) இது எளிதில் கணிக்கக் கூடியது.

(2) கொடுக்கப்பட்ட சமுதாயத்தில், ராண்டமாக ஒரு மனிதரை எடுத்துக்கொண்டால், அவர் இறக்கும் வயதை மதிப்பிட இது பயன்படுகிறது. இறப்பு நிகழ்தகவுவீதமாக இது பயன்படுகிறது.

(3) மக்கள்தொகையில் ஆண், பெண் என்ற பால்வேறு பாடு இன்றியும், முதியோர், இளைஞர், பாலர் என்ற வயதுப் பாகுபாடு இன்றியும் மக்கள்தொகை, இறப்பு எண்ணிக்கைகள் இங்குக் கையாளப்படுகின்றன.

(4) பெரிதும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் இறப்புவீத அளவை இதுவாகும்.

(5) மக்கள்தொகையின் மொத்த எண்ணிக்கை மதிப்பிடப் பட்டு இவ்வீதம் காணப்படுகிறது. எனவே, அம் மதிப்பீடு துல்லியமானதாகவும் மிகச் சரியானதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

(6) இத்தகு வீதங்களைக்கொண்டு, இருவித சமுதாய இறப்புகளை ஒப்பிடுவது பொதுவாகப் பொருத்தமன்று.

II குறிப்பிட்ட மக்கள் பகுதியின் இறப்புவீதம்

$$= \frac{\text{குறிப்பிட்ட மக்கள் பகுதியில் இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{அக்குறிப்பிட்ட மக்கள்தொகையின் மொத்த எண்ணிக்கை}} \times 1,000$$

இங்குப் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் சொல்லப்பட்டுள்ள எண்ணிக்கைகள், கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு நாட்டின் பகுதியில் (Region) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், மக்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவினில் எடுக்கப்பட்டவைகளாகும். மக்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவு என்பது, அந்நாட்டுப் பகுதியில் ஒரே பால் (ஆண் அல்லது பெண்) இனத்தைச் சேர்ந்தவர்களாக அல்லது ஒரே வயதுக் குழுவினைச் சார்ந்தவர்களாகக் கருதப்படல்வேண்டும்.

இவ்வீதத்தின் குறைகளும் நிறைகளும்:

(1) இதனை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

(2) இது பெரிதும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

(3) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச் சார்ந்த ஒரு மனிதன் இறப்பதற்குரிய நிகழ் தகவினைச் சற்றுத் துல்லியமாக, நம்பத்தகுந்த மதிப்பில் இது தருகிறது.

(4) இரு பூகோளப்பகுதிகளில் உள்ள மக்களின் இறப்பு வீதங்களை ஒப்பிட இது பயன்படுகிறது.

III தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதம்

பொதுவாகக் குழந்தைகளின் இறப்புவீதமும், முதியோர்களின் இறப்புவீதமும் மிக அதிகமாகும். இரு பிரிவு மக்கள்

தொகையில் வயதுக் குழுக்களின் அமைப்பு (Age Composition) வெவ்வேறு வகைப்படலாம். எனவே, இவ்விரு பிரிவுகளிலும், குத்துமதிப்பு இறப்புவீதம் ஒரே எண்ணாக அமைந்தாலும், இரண்டு பிரிவுகளிலும் இறப்புவீதங்கள் ஒத்த தன்மையில் அமைந்துள்ளன எனச் சொல்ல முடியாது. மக்கள்தொகையில் வெவ்வேறு பிரிவுகளின் இறப்புவீதங்களையே, குறிப்பிட்ட மக்கள் பகுதியின் இறப்புவீதங்கள் காட்டுகின்றன. இக் குறைகளை நீக்குவதற்காக, தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதம் காணப்பட்டது. இந்த வீதக் கணிப்பில், வயதுக்குழு அமைப்புப் பிரிவுகள் ஒரேமாதிரியாகக் கொள்ளப்படுகின்றன. இங்கு மக்கள்தொகை தரப்படுத்தப் படுகின்றது.

A, *B* என்ற இரண்டு இடங்களில், *A* என்ற இடத்திலுள்ள மக்கள்தொகையைத் தரமான மக்கள்தொகையாகக் கொள்ளப் பட்டு, *B*-யின் மக்கள்தொகையில் இறப்புவீதம் காணப்பட்டு, அது *A*-யின் இறப்புவீதத்தோடு ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது. *A*-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம் முதலில் காணப்படுகிறது. பின், *B*-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம் காணப்படுகிறது, பின், *B*-யின் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதம் =

$$\frac{\sum_{\text{வயதுக்குழு}} \left[\begin{matrix}B\text{-யின் குத்துமதிப்பான} \\ \text{இறப்புவீதம்}\end{matrix} \times \begin{matrix}A\text{-யின் மக்கள்தொகை} \\ \text{எண்ணிக்கை}\end{matrix} \right]}{A\text{-யின் மக்கள்தொகை மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

என்பது காணப்படுகிறது. *A*-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம் p என்க; *B*-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம் q என்க. *B*-யின் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதம் r என்க. $p = q$ வாக அமைந்தாலும் *A*, *B* ஆகிய இரு இடங்களிலும் உள்ள மக்கள் உடல் நலத்தில் ஒரே தன்மையானவர் எனக் கூறமுடியாது. *B* என்ற இடத்தி லுள்ள மக்களின் உடல்நலத் தன்மையை *A*-யோடு ஒப்பிட *B*-யின் குத்துமதிப்பான இறப்புவீதம் q-வானது, *B*-யின் தரப்படுத்தப் பட்ட இறப்புவீதம் r-யைவிடச் சிறியதா, பெரியதா எனப் பார்க்கவேண்டும். $r < p$ ஆக அமைந்தால், *B* மக்கள் *A* மக்களை விட உடல்நலத்தில் சிறந்தவராகக் கருதப்படுவர்; $r > p$ ஆக அமைந்தால், *A* மக்கள் *B* மக்களைவிட உடல்நலத்தில் சிறந்தவர்கள் எனக் கருதப்படுவர்.

'சராசரிகள்' என்ற தலைப்பைக்கொண்ட 4வது அத்தி யாயத்திலும் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்புவீதத்தினைப் பற்றி எடுத்துக்காட்டுக்கணக்கோடுவிளக்கியிருப்பதை மீண்டும் மாணவர் கவனிக்க.

மக்கட் பெருக்க வளம்

சிறப்புப் புள்ளிவிவரத்தோடு இணைந்த மற்றொன்று மக்கள் பெருக்கவளம் (Fertility) ஆகும். அதனை அளக்கும் அளவைகளாவன: (1) குத்துமதிப்பான பிறப்புவீதம் (Crude Birth Rate); (2) பொதுவான மக்கள்பெருக்க வளவீதம் (General Fertility Rate); (3) குறிப்பிட்ட வயதுக்குழுவில் மக்கள் பெருக்கவளவீதம் (Age Specific Fertility Rate); (4) மொத்த மக்கள்பெருக்கவளவீதம் (Total Fertility Rate); (5) பெண்பாலரின் உற்பத்திவீதம் (Gross Reproduction Rate); (6) எஞ்சிய மக்கள்உற்பத்திப் பெருக்கவீதம் (Net Reproduction Rate).

இவைகளில், முதலாவதான குத்துமதிப்புப் பிறப்புவீதம் =

$$\frac{\text{ஓர் ஆண்டில் உயிரோடு பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{அவ்வாண்டின் நடுவில் மொத்த மக்கள்தொகை}} \times 1,000$$

பெயருக்கேற்றபடி, இது குத்துமதிப்பான ஓர் அளவையாகும். மக்கள்தொகை வளர்வீதத்தினை அளக்கும் மிகச் சிறந்த கருவியாக இதனைக் கொள்ளமுடியாது.

இரண்டாவது,

பொதுவான மக்கள் பெருக்கவள வீதம் =

$$\frac{\text{உயிரோடு பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மக்கள்பேறுகொள்ளும் வயதுடைய மகளிர் எண்ணிக்கை}} \times 1,000$$

ஏறத்தாழ 15 முதல் 50 வயதுடைய மகளிரை மக்கள் பேறுகொள்ளும் வயதுடைய மகளிர்களாகக் கருதலாம். குழந்தைகளின் பிறப்பு, இத்தகைய பெண்களைச் சார்ந்திருப்பதால், இது மக்கள் பெருக்கவள அளவையாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

மூன்றாவது குறிப்பிடப்பட்டுள்ள, குறிப்பிட்ட வயதில் மக்கள் பெருக்க வளவீதம்

$$= \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட வயதுக்குழுவில் உள்ள பெண்களுக்குப் பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{அவ்வயதுக் குழுவில் நடுத்தர வயதில் உள்ள பெண்களின் எண்ணிக்கை}} \times 1,000$$

நான்காவது, மொத்தப் பெருக்கவளவீதம் என்பது தரப் படுத்த முறையில் கையாளப்படுகின்றது.

ஐந்தாவது, சொல்லப்பட்ட பெண்பாலரின் உற்பத்தி வீதம் =

$$\frac{\text{பெண்குழந்தை பிறப்புகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த குழந்தை பிறப்புகளின் எண்ணிக்கை}} \times \text{மொத்த உற்பத்தி வளவீதம்}$$

ஆருவது முறையில் எந்த வீதத்தில் பெண் மக்கள்தொகை, பெண்குழந்தைகளை உற்பத்தி பண்ணுகிறது எனக் காணப்படு கின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சமுதாயப் பிரிவில், மகப் பேறு கொள்ளத்தக்க வயதில் 1,200 பெண்கள் இருக்கின்றனர் எனக்கொள்வோம். அவர்களுக்குப் பெண் குழந்தைகள் பிறக் கின்றன; வளர்கின்றன; சில மடிகின்றன. அந்த 1,200 பெண் களும் மடிந்த பின்னர், அவர்கள் பெற்றெடுத்தவர்களில் மகப் பேறு கொள்ளத்தக்க வயதில் 1,200 பெண்கள் உயிரோடு இருக்கின்றனரெனில், எஞ்சிய மக்கள் உற்பத்திவீதம் 1 ஆகக் கொள்ளப்படுகின்றது. இங்கு, 1,200 பெண்கள், மகப்பேறு கொள்ளத்தக்க வயதில் 1,200 பெண்களைவிட்டுச் செல்கின்றனர்; மாறுக, அவ்வயதில் 1,500 பெண்களை விட்டுச்சென்ருல் மக்கள் தொகை பெருகுவதாகவும் அவ்வீதம் 1-க்கு மேற்பட்டதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. அவ்வாறல்லாமல், அவ்வயதில் 1,000 பெண்களை விட்டுச்சென்ருல், மக்கள் தொகை குறைவதாகவும் அவ்வீதம் 1-க்குக் கீழ்ப்பட்டதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது.

பயிற்சி

1. இந்திய நாட்டுப் புள்ளிவிவரங்கள் பற்றி ஒரு கட்டுரை எழுதுக.
2. இந்திய மக்கள் கணிப்புப் பற்றி ஒரு குறிப்பு வரைக.
3. 1981ஆம் ஆண்டு மேற்கொள்ளப்படும் மக்கள் கணிப் பிற்கு நீங்கள் தலைமை அலுவலராக நியமிக்கப்பட்டால் எத்தகைய திட்டத்துடனும், வினப்பட்டியல்களுடனும் பணியாற்றுவீர்கள் என்பதனையும், முந்தியக் கணிப்பில் மேற்கொள்ளப்படவிருக்கும் மாற்றங்களையும் விளக்குக. மேலும், எத்தகைய துணை ஆய்வினைமேற் கொள்வீர்கள் என்பதனையும் அவைகளுக்குரிய திட்டங்களோடு விளக்குக.
4. சிறப்புப் புள்ளிவிவரம் பற்றிக் குறிப்பு வரைக.

13. புள்ளியியல் பிழைகளும், புள்ளிவிவரங்களுக்கு விளக்கங்கள் நல்குதலும்

புள்ளியியல் பிழைகள்

புள்ளியியல் பிழை (Statistical Error) என்றால் புள்ளியியலில் ஏற்படுகின்ற தவற்றைக் (Mistake) குறிப்பதன்று. புள்ளியியல் மாறியின் உண்மையான ஒரு மதிப்பிற்கும், அதன் மதிப்பீட்டிற்கு முள்ள வேறுபாடே புள்ளியியல் பிழையாகும். எனவே, பிழை என்ற சொல் விலக்கம் என்ற பொருளில் கையாளப்படுகின்றது; தவறு என்ற பொருளில் கையாளப்படவில்லை. இத்தகைய பிழைகளுள், நிகழ்தகவுப்பிழை, திட்டப்பிழை ஆகியன பற்றி முன்பே கண்டுள்ளோம்.

புள்ளியியலில் இத்தகு பிழைகள் இருவிதமாகக் கணிக்கப் படுகின்றன. உண்மையான மதிப்பிற்கும், மதிப்பீட்டிற்குமுள்ள வேறுபாட்டை மட்டும் சில தருணங்களில் எடுத்துக் கொள்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மாநிலத்தின் ஒரு பகுதி நிலப்புறத்தில் ஏக்கர் ஒன்றுக்கு 40மூட்டை நெல் விளைந்துள்ளதாகக்கொள்வோம். புள்ளியியல் கணக்கீடு முறைப்படி அது 42 மூட்டைகளாக மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறதெனில், இங்கு வேறுபாடு $40 - 42 = -2$ மூட்டைகளாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அஃதாவது பிழை -2 ஆகக் கொள்ளப்படுகிறது. மதிப்பீடு 38 மூட்டைகளெனில், வேறுபாடு $40 - 38 = 2$ மூட்டைகளாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அஃதாவது பிழை $+2$-ஆகக் கொள்ளப்படுகிறது. இத்தகைய வேறுபாடுகளைத் **தனிப் பிழை** (Absolute Error) என அழைக் கின்றோம். தனிப்பிழைகள் காணும்போது, மதிப்பீட்டிற்கும் உண்மையான மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடெனவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். புள்ளியியலில், வேறு பல தருணங்களில் இத் தனிப்பிழையை மதிப்பீட்டால் வகுத்துச் **சார்புப் பிழை** (Relative Error) யாகக் கொள்கிறோம். தனிப்பிழைகளைவிடச் சார்புப்

பிழைகள்தா... மிகவும் முக்கியமானவை. சில தருணங்களில் தனிப்பிழைகள் தவறான கருத்தைத் தந்துவிடும்.

புள்ளியியலில் காணப்படும் இத்தகு பிழைகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். அவை (1) ஒருதலைப்பட்சமான (Biased) பிழைகள்; (2) ஒருதலைப்பட்சமற்ற (Unbiased) பிழைகள். என்பனவாகும். புள்ளிவிவர ஆய்வாளர், புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பாளர்கள், புள்ளிவிவரத்தை நல்குபவர்கள், புள்ளிவிவரத்தினை ஆய்ந்து விளக்கம் கூறுபவர்களால் ஒருதலைப்பட்சமான பிழைகள் நிகழ்கின்றன. மனிதனின் மனநிலை காரணமாக இப் பிழைகள் நிகழ்கின்றன. வயதைப் பற்றிய புள்ளிவிவரச் சேகரிப்பில், விவரம் நல்கும் பெண்கள் தங்கள் வயதைக் கொஞ்சமாவது குறைத்துத்தானே கூறுவர்! இத்தகு ஒருதலைப்பட்சமான பிழைகள் பெரும்பாலும் ஒருமுகமாகவே நிகழ்ந்து குவிவுநிலை அடைகின்றன. புள்ளிவிவர ஆய்வினில் சொற்களை விளக்குவதிலும், குத்துமதிப்புகள் (Approximate Values) எடுக்கும் நிலையிலும் ஒருதலைச்சார்பற்ற பிழைகள் நிகழ்கின்றன. பொதுவாக, இத்தகு பிழைகள் இயற்கையிலேயே எதிர்முகமாக நிகழ்ந்து ஒன்றையொன்று சரிப்படுத்திக் கொள்ளுகின்றன. 1,000 பேர்களின் வயதை ஒரு புள்ளிவிவர ஏட்டினில் குறிக்கும்போது, முழு வருடங்களாக எழுதுவோமானால், 24 வருடங்கள் 4 மாதங்கள் என்பதை 24 வருடங்கள் எனவும், 23 வருடங்கள் 8 மாதங்கள் என்பதையும் 24 வருடங்கள் எனவும் எழுதினால், பிழைகள் தாமாகவே சரிசெய்து கொள்ளப்படுகின்றன.

புள்ளிவிவர ஆய்வாளர்கள் கையாளும் தகுதியற்ற மூல அலகாலும், வினாப்பட்டியலிலுள்ள தக்க விளக்கமற்ற வினாக்களாலும் புள்ளியியலில் பிழைகள் நிகழ்வதுண்டு.

புள்ளி விவர விளக்கம்

ஆய்வு மேற்கொள்வதற்காக, புள்ளிவிவரங்கள் முதல்தரச் சேகரிப்பு முறைகளாலோ, இரண்டாம்தரச் சேகரிப்பு முறைகளாலோ மாதிரிக்கூறு முறைகளாலோ சேகரிக்கப்படுகின்றன. பின்னர், அப் புள்ளி விவரங்களுக்கேற்ற பரவல் அளவைகள், மையப்போக்கு அளவை, பரவுகை அளவை, கோட்ட் அள்வை, இன்ன பிற அளவைகள் கணிக்கப்படுகின்றன. அவசியமானால், காலப் போக்குத் தொடர்களும், போக்காய்வுகளும், குறியீட்டு எண்களும், ஒட்டுறவுக் கெழுக்களும், ஒட்டுறவுக் கோடுகளும், பொருத்தப்படவேண்டிய வளைகோடுகளும் காணப்படுகின்றன. பின்னரே, புள்ளிவிவரங்களின் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய

பல்வேறு தன்மைகளுக்கு விளக்கம் (Interpretation) நல்கப் படுகின்றன. இத்தகைய அளவைகளைக் கண்டு, விளக்கம் நல்குவது எளிய செயலன்று. எல்லோராலும் செய்யத்தக்கது மன்று. புள்ளியியலைக் கற்றுத்தேர்ந்த வல்லுநர்களாலேயே இவை செய்யப்படவேண்டும். திறனற்றவர்களின் கையில் புள்ளி விவரங்கள் இருப்பது மிக ஆபத்தான கருவியாகும். புள்ளியியலுக்கு வரம்புண்டு. அதனை அறிந்து அதற்கேற்ப விளக்கம் தரப்படல் வேண்டும். விளக்கம் தரும்போது கீழ்க்காணும் பாதுகாப்பு முறைகளைக் கையாளவேண்டும்.

(1) புள்ளிவிவர அளவைகள் காணுதல், ஆய்தல் ஆகியவை கற்றுணர்ந்த வல்லுநர்களால் செய்யப்படவேண்டும்.

(2) ஒருதலைச் சார்பற்ற முறையில் விளக்கம் தர முற்படல் வேண்டும்.

(3) பொருத்தமற்ற புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு விளக்கம் தரக்கூடாது.

(4) ஒரு சூழ்நிலைக்குக் கண்ட புள்ளிவிவரத்தினைப் பிறி தொரு சூழ்நிலைக்குப் பயன்படுத்தக்கூடாது.

(5) ஒன்றுக்குப் பயன்படும் பண்பளவையை பிறிதொரு புள்ளிவிவரத்திற்குப் பயன்படுத்தக்கூடாது.

(6) நம் வாதத்திற்குப் பொருந்தும்படியாகப் புள்ளிவிவ ரங்களைச் சேகரித்தல் கூடாது.

(7) பலனிலிருந்து காரணத்திற்கு வாதித்து, பலனையும் காரணத்தையும் குழப்பிக்கொள்ளக் கூடாது.

(8) பொருத்தமற்ற மாதிரிக் கூறிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளைக் காண முயலக் கூடாது.

(9) பொருத்தமான, ஏற்ற அளவுடைய மாதிரிக்கூறுகளை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

(10) ஒப்பிடத்தக்க புள்ளிவிவரங்களையே, ஏற்ற அளவை களைக்கொண்டு ஒப்பிடவேண்டும்.

இதுபோன்ற, இன்னபிற முக்கியமான பாதுகாப்புகளுடன் புள்ளிவிவர விளக்கம் கூற முற்படல்வேண்டும். அப்போதுதான் தெளிந்த பொருத்தமான உண்மை முடிவு பெறப்படும்!

பயிற்சி

1. கணக்குப் பதிவியலில் (Accountancy) அறியப் படும் பிழைகளுக்கும், புள்ளியியல் பிழைகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டைத் தக்க எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக. புள்ளியியல் பிழைகள் எத்தனை வகைப் படும்? அவைகளை எவ்வாறு அளக்கலாம்? (செ.ப.)

2. புள்ளிவிவரங்களுக்கு விளக்கம் அளிக்க முற்படும்போது கவனத்தில் கொள்ளவேண்டிய பாதுகாப்பு நடவடிக் கைகள் சிலவற்றைக் கூறுக.

14. பண்புகளின் தொடர்பு

கல்வியுடைய தன்மை, மணமான தன்மை, புத்திக் கூர்மைத் தன்மை போன்ற தன்மைகளைப் பண்புகள் (Attributes) என புள்ளியியலில் குறிப்பிடுகிறோம். இத்தகு பண்புகளை A, B, C ... போன்ற உரோமப் பெரிய எழுத்துகளாலும், அப் பண்புகளற்ற கல்லாத் தன்மை, மணமாகாத் தன்மை, புத்திக் கூர்மையற்ற தன்மை போன்ற எதிர்மறை இயல்புத் தன்மைகளையும் பண்புகளெனவே குறிப்பிட்டாலும், அவைகளை α, β, γ ... ... என்ற கிரேக்க எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுகிறோம். A, α என்பன ஒன்றுக்கொன்று எதிர்மறை. A தன்மையுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையை (A) என்ற குறியாலும், γ தன்மையுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையை (γ) என்ற குறியாலும், இதுபோன்றே மற்றைய தன்மைகளை அதற்குரிய குறிகளாலும் எழுதுகிறோம். (A, B) என்பது A, B ஆகிய இரு பண்புகளுமுடைய நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். ஓர் ஆய்வுத் தொகையிலுள்ள மொத்த எண்ணிக்கை N எனில், கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் எளிதில் புலனாகும்.

$$N = (A) + (\alpha)$$
$$N = (B) + (\beta)$$
$$N = (AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta)$$
$$(A) = (AB) + (A\beta)$$
$$(\beta) = (A\beta) + ((\alpha\beta)$$

(A), (B), (α) முதலியன ஓரினப் பண்பலைவெண்கள், (AB); $(A\beta)$; $(A\gamma)$ ... ... என்பன ஈரினப் பண்பலைவெண்கள், $(AB\gamma)$, (ABC) முதலியன மூவினப்பண்பலைவெண்கள் எனக் கூறுகிறோம்; N ஆனது பூஜ்ய இன அலைவெண்ணாகும்.

புள்ளி விவரத்தின் மெய்நிலை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரங்கள் மெய்யானதாகவிருக்க வேண்டுமெனில், பண்பலைவெண்கள் மிகை எண்களாகவோ,

பூஜ்யமாகவோ இருக்கவேண்டும். அவை குறை எண்களாக இருக்கக் கூடாது. புள்ளிவிவரத்தின் மெய்நிலையை நிறுவ, பண்பலைவெண்கள் மிகை எண்களே எனக் காட்டினால் போதுமானதாகும்.

குறிமுறை

$(A) = A \cdot N$ என எழுதுகிறோம்.

$(\alpha) = \alpha \cdot N$ ஆகும்.

எனவே, $A + \alpha = 1$

$$\alpha = 1 - A.$$
$$A = 1 - \alpha.$$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) &= \alpha\beta \cdot N \\ &= (1 - A)(1 - B) \cdot N \\ &= (1 - B - A + AB) \cdot N \\ &= N - (B) - (A) + (AB)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\ \beta\ \gamma) &= \alpha\ \beta\ \gamma \cdot N \\ &= (1-A)(1-B)(1-C) \cdot N \\ &= (1 - A - B - C + AB + AC + BC - ABC) \cdot N \\ &= N - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) \\ &\quad + (BC) - (ABC).\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$N = 2{,}000;\ (A) = 1{,}620;\ (B) = 1{,}050;$
$(C) = 850: (AB) = 1{,}140; (AC) = 710:$
$(BC) = 190: (ABC) = 590.$

இப் புள்ளிவிவரத்தின் மெய்த்தன்மையை ஆய்க.

$$\begin{aligned}(\alpha\ \beta\ \gamma &= (1 - A)(1 - B)(1 - C) \cdot N \\ &= N - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) + (BC) - (ABC) \\ &= 2{,}000 - 1{,}620 - 1{,}050 - 850 + 1{,}140 + 710 + 190 - 590 \\ &= -70.\end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரம் மெய்யானதன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$N = 450: (A) = 30; (B) = 40;$
$(C) = 15; (AB) = 11; (BC) = 6;$
$(AC) = 8; (ABC) = 2$

மிக உயர்வினப் பண்பலேவெண்களேக் காண்க.

$$(ABC) = 2 \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)}.$$

$$\begin{aligned}(A\,B\,\gamma) &= AB\,(1-C)\,.\,N\\ &= (AB)-(ABC)\\ &= 11-2=9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\,\beta\,C) &= A\,(1-B)\,C\cdot N\\ &= (AC)-(ABC)\\ &= 8-2=6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\,\beta\,\gamma) &= A\,(1-B)\,(1-C)\cdot N\\ &= A\,(1-C-B+BC)\cdot N\\ &= (A)-(AC)-(AB)+(ABC)\\ &= 30-8-11+2\\ &= 13.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\,BC) &= (1-A)\,BC\cdot N\\ &= (BC)-(ABC)\\ &= 6-2\\ &= 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta\,C) &= (1-A)\,(1-B)\,C\cdot N\\ &= (C)-(BC)-(AC)+(ABC)\\ &= 15-6-8+2\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\,B\,\gamma) &= (1-A)\,B\,(1-C)\cdot N\\ &= (B)-(BC)-(AB)+(ABC)\\ &= 40-6-11+2\\ &= 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\,\beta\,\gamma) &= (1-A)\,(1-B)\,(1-C)\cdot N\\ &= (N)-(A)-(B)-(C)+(AB)\\ &\quad +(AC)+(BC)-(ABC)\\ &= 450-30-40-15+11+6+8-2\\ &= 388.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

B பண்பு காணுத இடங்களேவிட, *B* பண்பு காணுமிடங்களில் *A* பண்பு மிகுந்த விகிதாசாரத்தில் நிகழ்கிறது. எனில் *A* காணுத இடங்களேவிட, *A* காணுமிடங்களில் *B* மிகுந்த விகிதா சாரத்தில் நிகழும் எனக் காட்டுக. (செ.ப.)

$$\frac{(A\,B)}{(B)} > \frac{(A\,\beta)}{(\beta)}$$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

$$\therefore \quad \frac{(\beta)}{(B)} > \frac{(A\,\beta)}{(A\,B)}$$

$$\therefore \quad \frac{(\beta)}{(B)} + 1 > \frac{(A\,\beta)}{(A\,B)} + 1$$

(அ-து) $$\frac{(B + (\beta)}{(B)} > \frac{(AB) + (A\beta)}{(AB)}$$

(அ-து) $$\frac{N}{(B)} > \frac{(A)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{N}{(A)} > \frac{(B)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{N}{(A)} - 1 > \frac{B}{(B)} - 1$$

(அ-து) $$\frac{N-(A)}{(A)} > \frac{(B)-(AB)}{(AB)}$$

$$\frac{(\alpha)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(AB)}$$

$$\therefore \quad \frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$$

இதுவே நிறுவ வேண்டியதாகும்.

தேற்றம்

$(ABC \ldots n$ உறுப்புகள்$) \geq \{ (A) + (B) + (C) + \ldots \} - (n-1)\,N.$

நிறுவுதல்

$(\alpha\beta) \geq 0$ { $\because$ எப் பண்பலெவெண்ணும் எதிர்மறையன்று}

(அ-து) $(1-A)\,(1-B) \cdot N \geq 0$

$N - (B) - (A) + (AB) \geq 0$

$\therefore \quad (AB) \geq (A) + (B) - N$ (1)

தற்போது $N-(C) = (\gamma) \geq (AB\gamma)$

$\therefore \quad -(AB\gamma) \geq (C) - N$ (2)

(1) + (2),

$$(AB) - (AB\gamma) \geq (A) + (B) + (C) - 2N.$$

(அ-து) $(ABC) \geq (A) + (B) + (C) - 2N$

இதனை, n பண்புகளுக்கு விரிக்க, நாம் பெறுவது

$$(ABC \ldots) \geq \{(A) + (B) + (C) + \ldots\} - (n-1) \cdot N$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு நாட்டுப்புறப் பகுதியில் 75% மக்கள் கடனுளியாகவும், குறைந்தது 80% மக்கள் நிலமற்றவர்களாகவும், குறைந்தது 85% அசுத்தமான இடங்களில் வாழ்பவர்களாகவும் காணப் பட்டனர். எனில், கடனுளியாகவும், நிலமில்லாமலும், அசுத்த மான இடங்களில் வசிப்பவர்களாகவுமிருப்பவர் குறைந்தது எத்தனை சதவீதமெனக் காண்க.

கடனுளித் தன்மை A என்க

நிலமற்ற தன்மை B என்க

அசுத்தமான இடத்தில் வாழும் தன்மை C என்க

தற்போது $(ABC) \geq (A) + (B) + (C) - 2N$

(அ-து) $(ABC) \geq 75 + 80 + 85 - 200$

(அ-து) $(ABC) \geq 40$

மூன்று தன்மையாலும் சூழப்பட்டவர்கள் குறைந்தது 40% ஆகும்.

இரு பண்புகளின் உறவு அல்லது தொடர்பு,

$(AB = \dfrac{A \times (B)}{N}$ என்றால், A-யும் B-யும் உறவற்ற பண்பு களெனவும், $(AB) > \dfrac{(A) \times (B)}{N}$ யெனில், A, B ஆகியன நேர் உறவுடையன எனவும், $(AB) < \dfrac{(A) \times (B)}{N}$ யெனில், A, B ஆகியன எதிர்மறை உறவுடையன எனவும் கூறுகிறோம்.

பண்புறவுக் கெழுக்கள்

(1) யூல் பண்புறவுக்கெழு =

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

இங்கு Q ஆனது, கீழ்க்காணும் இருவழிப் பட்டியலில் குறுக்கே பெருக்கிக் கண்ட இரு உறுப்புகளின் வேறுபாட்டுத் தொகுதியாகவும், அவைகளின் கூடுதல் பகுதியாகவும் அமைந்துள்ளது.

பண்பு	A	α	மொத்தம்
B	(A B)	(α B)	(B)
β	(A β)	($\alpha\beta$)	(β)
மொத்தம்	A	(α)	N

இக்கெழு $-1 \leq Q \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்து கிடக்கும்.

$Q = -1$ யெனில் A, B முழு எதிர்த்தொடர்புடையன; $-1 < Q < 0$ யெனில், A, B எதிர்மறை உறவுடையன அல்லது தொடர்புடையன.

$Q = 0$ யெனில், A, B தனித்தன்மையன.

$0 < Q < 1$ யெனில், A, B நேர் உறவுடையன அல்லது தொடர்புடையன.

$Q = 1$ யெனில், A, B முழு உறவுடையன அல்லது தொடர்புடையன.

பிறிதொரு கெழு $R = \dfrac{\sqrt{(AB)\,(\alpha\beta)} - \sqrt{(A\beta)\,(\alpha B)}}{\sqrt{(AB)\,(\alpha\beta)} + \sqrt{(A\beta)\,(\alpha B)}}$

Q-வைப் போன்ற, R-ன் மதிப்பிலிருந்தும், A, B-யின் உறவினைத் தீர்மானிக்கலாம்.

$Q = \dfrac{2R}{1+R^2}$ என்பதனையும் எளிதில் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் காட்டப்பட்டுள்ள இரு பண்புகளின் Q, R கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

பண்புகள்	A	α
B	8	5
β	6	4

$$Q = \frac{32-30}{32+30} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}.$$

$$R = \frac{\sqrt{32} - \sqrt{30}}{\sqrt{32} + \sqrt{30}} = \frac{0{\cdot}18}{11{\cdot}134} = \frac{180}{1134}$$

பண்புகளின் தூர உறவு

C என்ற ஒரு பண்போடு இணைந்து, A-யும், B-யும் உறவு பெற்றால், A, B ஆகியன தூர உறவுடையன எனக் கூறுகிறோம்.

$(ABC) > \dfrac{(AC)\,(BC)}{(C)}$ யெனில், A, B ஆகியன நேர் தூர உறவுடையன என்றும், $(ABC) < \dfrac{(AC)\,(BC)}{(C)}$ யெனில் அவை எதிர்மறை உறவுடையன என்றும் கூறுகிறோம்.

யூல் தூர உறவுக்கெழு $Q_{AB\cdot C}$ $= \dfrac{(ABC)\,(\alpha\,\beta\,C) - (A\,\beta\,C)\,(\alpha\,BC)}{(ABC)\,(\alpha\,\beta\,C) + (A\,\beta\,C)\,(\alpha\,BC)}$

Q கெழுவிலுள்ள ஒவ்வோர் அடைப்புக் குறியினுள்ளும் C-யைச் சேர்க்கப்படுவது, $Q_{AB\cdot C}$ என்பதை நோக்குக.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

500 மாணவர்கள் கண் தெரியாதவர்கள். அவர்களின் புத்திக் கூர்மையை A-யும், உடல் வலிமையை B-யும் குறிக்கின்றன. $(AB) = 62$ $(A\beta) = 88$; $(\alpha B) = 100$; $(\alpha\beta) = 250$. எனில் A, B ஆகிய பண்புகளின் தூர உறவினைக் காண்க.

கண்தெரியாத்தன்மை C என்க.

$$(C) = 500$$
$$(AB) = (ABC) = 62$$
$$(A\beta) = (A\beta C) = 88$$
$$(\alpha B) = (\alpha BC) = 100$$
$$(\alpha\beta) = (\alpha\beta C) = 250$$

$$Q_{AB \cdot C} = \frac{(62 \times 250) - (88 \times 100)}{(62 \times 250) + (87 \times 100)}$$
$$= \frac{15500 - 8800}{15500 + 8800}$$
$$= \frac{6700}{24300}$$
$$= 0.28$$

எனவே, C-யுடன் இணைந்து A-யும், B-யும் நேர்மறைத் தூர உறவுடையன.

நேர்வுப் பட்டியல்

A என்ற பண்பு A_1, A_2, A_3... என்ற பல துணைப் பண்புகளை உடையதாக இருக்கும். A என்பது கண் நிறமாகக் கொண்டால், கருப்பு, நீலம், மாநிறம் என்ற துணைப் பண்புகளை A_1, A_2, A_3, எனக் கூறலாம். இதுபோன்றே B பண்புகளின் துணைப் பண்புகள் B_1, B_2, B_3 ... முதலியன. இவ்விரு தலைப்பண்புகளை, அவற்றோடு இணைந்த துணைப் பண்புகளோடு அமைக்கப்படும் பட்டியலுக்கு நேர்வுப் பட்டியல் (Contingency Table) என்பது பெயராகும்.

பண்பு A

பண்பு B		A_1	A_2	A_3	...	...	...	மொத்தம்
	B_1	(A_1B_1)	(A_2B_1)	(A_3B_1)	...	...	...	(B_1)
	B_2	(A_1B_2)	(A_2B_2)	(A_3B_2)	...	...	...	(B_2)
	B_3	(A_1B_3)	(A_2B_3)	(A_3B_3)	...	...	...	(B_3)
	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...
	மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	(A_3)	...	...	...	N

பயிற்சி

(1) $(ABC) = 15$; $(AB\gamma) = 74$
$(A\beta C) = 23$; $(A\beta\gamma) = 120$
$(\alpha BC) = 20$; $(\alpha B\gamma) = 176$
$(\alpha BC) = 17$; $(\alpha\beta\gamma) = 2184$

மற்றைய பண்பலேவெண்களைக் காண்க.

(2) $N = 1000$; $(A) = 525$; $(B) = 312$; $(C) = 410$; $(A\beta) = 483$: $(A\gamma) = 378$; $(B\gamma) = 226$; $(ABC) = 25$. இப் புள்ளிவிவரத்தின் மையத்தன்மையை ஆய்க. (அல.ப.)

3. ஒரு சோதனையில், குறைந்தது 57% கணக்கிலும், 60% புள்ளியியலிலும், 82% வேதியியலிலும், 91% ஆங்கிலத்திலும் தேறவில்லை. நான்கிலும் தேருதவர்கள் குறைந்தது எத்தனை சதவீதம்?

4. 'மது அருந்துபவர்களில் 99% இளமையில் இறந்து விடுகின்றனர். எனவே, வாழ்விற்கு மது தீங்கானது' — இக்கூற்றினை ஆய்க. (செ.ப.)

5. கீழ்க்காணும் இருவழிப் பட்டியலில் யூல் உறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

பண்பு	A	α
A	$a+b-c$	$b+c-a$
β	$c+a-b$	$a+b+c$

6. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் தந்தை, மகன் கண்களின் நிற உறவினைக் காண்க.

மகன் கண் நிறம்

		கருங்கருமை	சாம்பல் கருமை
தந்தை கண் நிறம்	கருங்கருமை	230	150
	சாம்பல் கருமை	150	420

(அல.ப.)

7. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குப் பண்புறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

சகோதரர்கள்

சகோதரிகள்		நல்ல தன்மையினர்	நல்ல தன்மை யற்றவர்
	நல்ல தன்மை யினர்	1230	530
	நல்ல தன்மை யற்றவர்	850	980

(செ.ப.)

8. ஒருவிதத் தொற்றுநோயால் பாதிக்கப்பட்ட ஒரு நகரில், பாதிக்கப்பட்ட 408 குழந்தைகளுக்கு மருத்துவம் செய்யப் பட்டது. அவர்களில் 104 பேருக்குக் குணத்திற்குப் பின்னர் சில தீங்குகள் (after-effects) ஏற்பட்டன. மருத்துவம் செய்யப்படாத எஞ்சிய 519 குழந்தைகளில், குணத்திற்குப் பின், 166 பேருக்குச் சில தீங்குகள் ஏற்பட்டன. இப் புள்ளிவிவரத்தினை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்து, பண்புகளின் உறவினைக் காண்க. (செ.ப.)

(9) $(A) = (B) = (C) = N/2 = 50$
$(AB) = 30;\ (AC) = 25.$
(BC) எந்த எண்ணிற்குள் விழும்? (செ.ப.)

(10) $$\frac{(A)}{N} = x;\ \frac{(B)}{N} = y = 2x$$

$$\left(\frac{C}{N}\right) = 3x;\ \frac{(AB)}{N} = \frac{(AC)}{N} = \frac{(BC)}{N} = y$$

எனில், x, y-ன் தனித்தனி மதிப்புகள் $\frac{1}{4}$-க்கு மிகை படாவெனக் காட்டுக. (செ.ப.)

15. நிகழ்தகவு

(ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குரிய வாய்ப்பினை எண் வடிவத்தில் தருவது நிகழ்தகவாகும். ஒரு நாணயத்தினைச் சுண்டினால், தலை விழுவதற்குரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$ எனக் கூறுகிறோம். அதாவது, தலைக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனப் பொருளாகும். இதுபோன்றே அறுமுகப் பகடை ஒன்றைச் சுற்றிவிட்டால், ஏதாவது ஒரு முகம் பிறழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{6}$ எனக் கூறுகிறோம்.) இத்தகைய வாய்ப்பினைக் காட்டும் பின்னத்தினை, அதாவது, **நிகழ்தகவு** அல்லது **நிகழ்திறத்தை** (Probability) எவ்வாறு கணிக்கிறோம்? இரு முறைகளில் இது கணிக்கப்படுகிறது.

கணக்கியல் நிகழ்தகவு

நெட்டுக்குத்தாக நிற்க இயலாதபடி உயரம் குறைந்த அளவுடைய சீரான நாணயம் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். அதனைச் சுண்டினால், நிகழுகின்ற இயக்கங்கள் இரண்டேயாகும். தலை, பூ ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளே உள; அதாவது, இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் இரண்டேயாகும். அவைகளில் தலை விழுவது ஒன்றாகும்; அதாவது, இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சி அவற்றுள் ஒன்றாகும். எனவே, **இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை** இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை என்பதனை நிகழ்தகவாகக்கொண்டு, அது $\frac{1}{2}$ எனக் கூறுகிறோம். இதுபோன்றே, பகடை வீச்சில், இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் 6 ஆகும். எந்த முகமும் பிறழலாம். இயலவேண்டியது ஏதாவது ஒரு புள்ளிமுகம் (வெற்றி முகம் '5 புள்ளிமுகம்' என்க) ஆகும். எனவே, இந்நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ எனக் கூறுகிறோம். இங்ஙனம், நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதற்கு முன்னமேயே, நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கியல் வாயிலாகக் கண்டு, நிகழ்தகவினைத் தீர்மானிக்கின்றோம். அவ்வாறு தீர்மானிக்கும் நிகழ்தகவினைக் **காரணகாரிய நிகழ்தகவு** அல்லது **நிகழ்முன்தகவு** (Apriori probability) அல்லது **கணக்கியல் நிகழ்தகவு** (Mathematical probability) எனக் கூறுகின்றோம்.

புள்ளியியல் நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவினைச் சோதனைகள் வாயிலாகவும் காணலாம். ஒரு நாணயத்தை 1,000 தடவைகள் சுண்டுவோம். அத்தனை சோதனைகளிலும், தலை விழுந்த தடவைகளை எண்ணி வைத்துக்கொள்வோம். எனில், நிகழ்தகவு $\frac{\text{தலைகளின் எண்ணிக்கை}}{1,000}$ ஆகும். இந்த எண் $\frac{1}{2}$-க்கு மிக நெருங்கி அமைவதைக் காணலாம். சுண்டப்படும் தடவைகள் மிகமிக, இத்தகவு $\frac{1}{2}$-க்கு இன்னும் மிகமிக நெருங்கி அமைவதைக் காணலாம். எனவே, தலைக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனக் கொள்கிறோம். இதுபோன்றே, பல தடவைகள் பகடையை வீசினால், ஏதாவது ஒரு முகம் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$-க்கு மிகமிக நெருங்கி அமைவதைக் கண்டு, அத்தகவு $\frac{1}{6}$ எனக் கொள்கிறோம். இம்முறை நிகழ்தகவினைக் **காரியகாரண நிகழ்தகவு** அல்லது **நிகழ்பின்தகவு** (Aposteriori probability) அல்லது **புள்ளியியல் நிகழ்தகவு** (Statistical probability) என அழைக்கின்றோம்.

பொதுக் குறிப்பு

$\frac{\text{இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$ என்பதனை, நிகழ்தகவு என விளக்கினோம். ஒரு நிகழ்ச்சி a தடவைகள் நிகழ முடியுமெனவும், b தடவைகள் நிகழத் தவறுமெனவும், மேலும் இந்த $(a + b)$ நிகழ்ச்சிகளும் சமவாய்ப்புடையனவெனவும் கொண்டால், அந்நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{a}{a+b}$ என்பதாகும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்குரிய நிகழ்தகவு, p, அதன் தோல்விக்குரிய நிகழ்தகவு q என்றால், $q+p=1$ என்பது எளிதில் புலனாகும். $p = 1$ எனில், அந்நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழுமெனவும், $p = 0$ எனில், அது உறுதியாக நிகழாதெனவும் கருதலாம். ஒரு நிகழ்ச்சியின் தகவு p எனில், N தடவைகளுள் pN தடவைகள் அது நிகழும் என்ற கூற்று எளிதில் விளங்கும். வெற்றிக்குச் சாதக பின்னம் $\frac{p}{q}$ என்றும், தோல்விக்குச் சாதக பின்னம் $\frac{q}{p}$ என்றும் கொள்ளப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1, 2, 3, 5, 0 என்ற ஐந்து எண்களைக்கொண்டு, நான்கு இடமுடைய எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) 5-ஆல்

வகுபட (ii) ஒற்றைப்படை எண்ணாக அமைவதற்குரிய வாய்ப்புகள் யாவை?

ஆ நூ ப ஒ

ஆயிரமாவது இடத்தில் 1, 2, 3, 5 ஆகிய நான்கு எண்களில் ஒன்று இடம்பெறும். எனவே, அவ்விடத்தினை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது இடத்தை எந்த எண்ணும் நிரப்பும். எனவே, அதனை 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். இதுபோன்றே, பத்தாவது, ஒன்றுவது இடங்களையும் ஐந்து, ஐந்து வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, உருவாகும் ஆயிரமாவது இடமுடைய எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500.$$

(i) **ஆ நூ ப ஒ**

எண் 5ஆல் வகுபட வேண்டுமெனில், ஒன்றுவது இடம் 0, 5 ஆகிய இரண்டு எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப்படவேண்டும். எனவே, அவ்விடத்தினை இரு வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆயிரமாவது இடத்தினை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது, பத்தாவது இடங்களை 5, 5, வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, 5-ஆல் வகுபடும் எண்கள்

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 2$$
$$= 200$$

எனவே, உருவாகும் எண் 5-ஆல் வகுபடுவதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \frac{200}{500} = \frac{2}{5}.$$

(ii) உருவாகும் எண் ஒற்றைப்படை எண்ணாக அமைய, ஒன்றுவது இடம் 1, 3, 5 ஆகிய 3 எண்களால் மட்டுமே நிரப்பப் பட முடியும். எனவே, ஒன்றுவது இடம் 3 வழிகளில் நிரப்பலாம். ஆயிரமாவது இடம் 4 வழிகளில் நிரப்பலாம். நூறுவது, பத்தாவது இடங்கள் 5, 5 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

∴ ஒற்றைப்படை எண்கள்

$$= 4 \times 5 \times 5 \times 3$$
$$= 300.$$

எனவே, உருவாகும் எண் ஒற்றைப்படையாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

நன்கு கலேக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை உருவினல், அது இராஜாவாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

இங்கு இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகள் = 52
கட்டில் உள்ள இராஜாக்கள் = 4
∴ இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகள் = 4

∴ சீட்டு, இராஜாவாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 4 வெள்ளேப் பந்துகளும், 6 கருப்புப் பந்துகளும், 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள. 3 வெள்ளேப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் சேர்த்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்திறமென்ன?

எடுக்கவேண்டிய மொத்தப் பந்துகள் = 5
பையிலுள்ள மொத்தப் பந்துகள் = 12
∴ 5 பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் = $12C_5 = 792$
3 வெள்ளேப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் = $4C_3 = 4$
2 கருப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் = $6C_2 = 15$

∴ 3 வெள்ளேப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 4 \times 15 = 60$.

∴ வேண்டியவாறு பந்துகளே எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= \frac{60}{792}$$

$$= \frac{5}{66}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

இரு பகடைகளே ஒரே சமயத்தில் வீசினல் மொத்தப் புள்ளிகள் 9 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

இயலத்தக்க மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6$
$= 36$,

வேண்டிய நிகழ்ச்சிகள்: (3,6) (4,5) (5,4) (6,3)
$= 4$

∴ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

3 பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் மூன்றுமுகப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 10ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

இயலும் மொத்த நிகழ்ச்சிகள்

$$= 6 \times 6 \times 6$$
$$= 216$$

இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

$= (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$-ல் x^{10}-ன் கெழு

$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3$-ல் x^7-ன் கெழு

$= \left(\dfrac{1-x^6}{1-x}\right)^3$-ல் x^7-ன் கெழு

$= (1 - x^6)^3 \ (1 - x)^{-3}$-ல் x^7-ன் கெழு

$= (1-3x^6+3x^{12}-x^{18}) \left\{\Sigma \ \dfrac{(\gamma+1)\ (\gamma+2)}{1\cdot2} \ x^{\gamma}\right\}$-ல்$x^7$-ன் கெழு

$= \dfrac{(7+1)\ (7+2)}{1\cdot2} - 3\cdot \dfrac{(1+1)\ (1+2)}{1\cdot2}$

$= 27$

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$

பயிற்சி

1. *1, 2, 3, 4, 5* ஆகிய எண்களைக்கொண்டு நூறுவது இடமுள்ள எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) ஒற்றைப்படை எண்ணாக, (ii) இரட்டைப்படை எண்ணாக, (iii) 5-ஆல் வகுபடும் எண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

2. *0, 3, 5, 7, 8* ஆகிய எண்களைக்கொண்டு ஆயிரமாவது இடமுள்ள எண் அமைக்கப்படுகிறது. அவ்வெண் (i) ஒற்றைப்படையாக, (ii) இரட்டைப்படையாக, (iii) 5-ஆல் வகுபடுமாறு அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை?

3. நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து, ஒரே சமயத்தில், இரண்டு சீட்டுகள் உருவப்படுகின்றன. அவை ஒன்று ஏஸாகவும், பிறிதொன்று ஜாக்காகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க; இரண்டுமே டைமண்டாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவினையும் காண்க.

4. ஒரு பையில் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும், 6 கருப்புப் பந்துகளும் 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 நீலப் பந்துகளும் உள. 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 நீலப் பந்துகளும் ஒன்றாக எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

5. 'புள்ளியியல்' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகள் மாறிமாறி வரிசைப்படுத்தி அமைக்கப்படுகின்றன.

 (i) 'பு' என்ற எழுத்தில் முடியும் சொல்லைப் பெற வாய்ப்பென்ன?

 (ii) 'ய'-வில் தொடங்கி 'பு'-வில் முடியும் சொல்லைப் பெற வாய்ப்பென்ன?

 (iii) 'பு', 'ய' என்ற எழுத்துகளுக்கிடையே இரண்டு எழுத்துகள் மட்டுமே அமைவதற்குரிய வாய்ப்பென்ன?

6. 3 பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்ட, மொத்தப் புள்ளிகள் 9 ஆகவும் 10 ஆகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

7. ஒரு குழுவில் 10 பி.யு.ஸி. மாணவர்களும், 5 பி.ஏ. மாணவர்களும், 6 பி.எஸ்.ஸி. மாணவர்களும் உள்ளனர். 5 பேர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். அவர்களுள் 3 பேர் மட்டும் பி. எஸ். ஸி. மாணவர்களாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி, அது நிகழும் அதே தருணத்தில் பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழாவண்ணம் தடுக்குமானால், அத்தகு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events) என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு சோதனைக்குட்படும் ஒரு மாணவர் வெற்றியடைவார் அல்லது தோல்வியடைவார். நாணயத்தினைச் சுண்ட, தலை விழும் அல்லது பூ விழும். வெற்றி, தோல்வி; தலை, பூ ஆகிய ஜோடி நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். பகடையை வீச விழும் நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டல் தேற்றம்

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் பல நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அத்தகு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும். எல்லா

நிகழ்ச்சிகளும் மொத்தம் N தடவைகளில் நிகழுகின்றன என்க. இவற்றுள், முதல் நிகழ்ச்சி a_1 தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_1 = \frac{a_1}{N}$. இரண்டாம் நிகழ்ச்சி a_2 தடவைகளில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_2 = \frac{a_2}{N}$. இதைப்போன்றே, k-ஆவது நிகழ்ச்சி a_k தடவைகள் நிகழ்வதாகக் கொண்டால், அதன் தனி நிகழ்தகவு $= p_k = \frac{a_k}{N}$. ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால், ஒன்று நிகழும்போது பிறிதொன்று நிகழாது. எனவே, இந்த k நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நடப்பன $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ தடவைகள் ஆகும்.

∴ ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{தகவு} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{N}$$

$$= \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N} + \frac{a_3}{N} + \dots + \frac{a_k}{N}$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k$$

எனவே, தேற்றம் மெய்யானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 7 கருப்பு, 5 மஞ்சள், 3 வெள்ளைக் கோலிகள் இருக்கின்றன. ஏதாவது ஒரு கோலி எடுக்கப்படுகிறது. அது மஞ்சளாக அல்லது வெள்ளையாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

மஞ்சள் கோலியை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{5}{15}$.

வெள்ளைக் கோலியை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{3}{15}$

இரு நிறத்தில் ஒன்ருக இருக்கவேண்டுமாதலால், இவையிரண்டும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

∴ வேண்டிய நிகழ்தகவு $\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 3 சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. 3 சீட்டுகளும் ஹார்ட்ஸாகவோ, கிளப்ஸாகவோ அமைய நிகழ்தகவு யாது?

3 சீட்டுகளை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 52C_3 = 22,100$.

3 ஹார்ட்ஸ்களை எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 13C_3 = 286$

$\therefore$ 3 ஹார்ட்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{236}{22,100}$

$\therefore$ 3 கிளப்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{286}{22,100}$

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{572}{22,100} = \frac{145}{5,525}$

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

ஒரு நிகழ்ச்சி, அது நிகழும் அதே தருணத்தில், பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதைப் பாதிக்காமலிருப்பின், அத்தகு நிகழ்ச்சிகளுக்குச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (independent events) எனப் பெயராகும்.

புகுமுக வகுப்பிலிருந்து ஒரு செயலாளரையும், இளங்கலை வகுப்பிலிருந்து ஒரு செயலாளரையும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமெனில், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

பெருக்குத் தேற்றம்

ஒரே சமயத்தில் பல சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு, அந்தந்தச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும். முதலில், இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அந்நிகழ்ச்சிகளை E_1, E_2 எனக் குறிப்பிடுவோம்.
எனில், 4 வகையான சம்பவங்கள் நிகழலாம்.

(1) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வது;
(2) E_1 நிகழ்வது; E_2 நிகழாமலிருப்பது;
(3) E_1 நிகழாமலிருப்பது; E_2 நிகழ்வது;
(4) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழாமலிருப்பது.

E_1 நிகழ்வது a_1 தடவைகள்; நிகழாமலிருப்பது b_1 தடவைகள் என்க.

E_2 நிகழ்வது a_2 தடவைகள்; நிகழாமலிருப்பது b_2 தடவைகள் என்க.

எனில்,

(1) E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வது a_1, a_2 தடவைகள்;
(2) E_1 நிகழ்ந்து E_2 நிகழாமலிருப்பது a_1, b_2 தடவைகள்;
(3) E_1 நிகழாது E_2 நிகழ்வது b_1, a_2 தடவைகள்;
(4) E_1 E_2, இரண்டும் நிகழாமலிருப்பது b_1,b_2 தடவைகள்.

எனவே, இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின்

எண்ணிக்கை $= a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2$

$= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$

E_1, E_2 இரண்டும் இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின்

எண்ணிக்கை $= a_1 a_2$

$\therefore$ E_1, E_2 இரண்டும் நிகழ்வதற்குரிய

$$\text{தகவு} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

$$= \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2}$$

$$= p_1 p_2$$

இங்கு p_1, p_2 என்பன E_1, E_2-வின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளாகும். இவ்வாறு, இரு நிகழ்ச்சிகளில் தேற்றம் உண்மையெனக் காணப் பட்டது. இதுபோன்றே, எத்தனை நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இதனை நீட்ட, தேற்றம் மெய்யாகும்.

குறிப்பு

E_1 நிகழ்ந்தபின் E_2 நிகழுமானல், மேற்கண்ட வாதம் இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொருந்தும். அங்கு p_2-வினை E_2-வின் சார்ந்த நிகழ்தகவு (Conditional probability) எனக் கூறுகிறேம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு பையில் 7 வெள்ளை, 4 கருப்புப் பந்துகள் உள. ஒன்றன் பின் ஒன்ருக இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் பையில் போட்ட நிலையில், (ii) முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் போடாத நிலையில், அவ்விரு பந்துகளும் கருப்பாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

முதல் கருப்புப் பந்து எடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{4}{11}$ மீண்டும் பந்தைப் போட்டபின், முன்நிலையே இருப்பதால், 2ஆவது கருப்புப் பந்து எடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{4}{11}$.

எனவே, இரண்டும் கருப்புப் பந்துகளாக அமைவதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{11}$$

$$= \frac{16}{121}.$$

(ii) முதல் பந்து எடுத்தபின், மீண்டும் போடாவிட்டால், பையில் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் இருக்கும். எனவே, 2ஆவது கருப்புப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{3}{10}$.

எனவே, இரண்டும் கருப்புப் பந்துகளாக அமைய நிகழ்தகவு

$$= \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

பயிற்சி

1. குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவைகள் இரண்டும் டைமண்டுகளாக அல்லது இரண்டும் ஹார்ட்ஸ்களாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

2. ஒரு பையில் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள. 5 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவைகளில் 3 வெள்ளையாகவும் 2 கருப்பாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? (செ.ப.)

3. ஒரு பாத்திரத்தில் 5 சிவப்பு, 10 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. 8 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக எடுக்கப் படுகின்றன. (1) ஒவ்வொரு பந்தும் எடுத்த பின்னர், மீண்டும் பாத்திரத்தில் போடப்பட்டால், (2) அவ்வாறு போடாமல் இருந்தால், 3 சிவப்பாகவும் 5 பச்சையாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

4. ஒரு பாத்திரத்தில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. வேருென்றில் 3 வெள்ளையும் 4 கருப்பும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டும் ஒரே நிறமாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

5. ஒரு கணக்கிற்குத் தீர்வுகாண, A-க்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$; B-க்குரியது $\frac{4}{5}$. இருவரும் முயன்ருல், 'கணக்கின் தீர்வு காணப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

6. மூன்று பேர், ஒருவருக்குப்பின் ஒருவராக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுகின்றனர். முதன் முதலில் தலை பெறுபவருக்குச் சிறப்புப் பதவியுண்டு. ஒவ்வொருவரும்

சிறப்புப் பதவி பெறுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் யாவை? n பேர்கள் போட்டியிட்டால், ஒவ்வொருவரின் வாய்ப் பென்ன? (செ.ப.)

தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p எனில், n தடவைகளில் r தரம் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $n\,C_r\,q^{n-r}\,p^r$. இங்கு $q + p = 1$.

நிறுவுதல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சி, குறிப்பிட்ட r தடவைகள் நிகழ்ந்து, $(n-r)$ தடவைகள் நிகழாமலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $p^r q^{n-r}$ ஆகும் (பெருக்குத் தேற்றப்படி). மொத்தத் தடவைகளில் ஏதாவது r தடவை இந்நிகழ்ச்சி நடந்தும், எஞ்சிய $(n-r)$ தடவைகளில் நிகழாமலிருக்கும். அத்தகைய r தடவைகளுக்கான வழிகள் nC_r ஆகும். எனவே, அந்நிகழ்ச்சிகளின் வெற்றியும் தோல்வியும் இணைந்து nC_r வழிகளில் நடக்கும். ஒவ்வொரு வழியிலும் நிகழ்ச்சிக்குரிய தகவு $p^r\,q^{n-r}$ ஆகும். nC_r வழிகளில் $nC_r\,q^{n-r}\,p^r$ ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றித் தகவு p, தோல்வித் தகவு q எனில், n சோதனைகளில் $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் முறையே $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிப்பின் வரிசை உறுப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஏழு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக 4 தலைகள், (ii) குறைந்தது 4 தலைகள், (iii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை?

இங்கு $q = \frac{1}{2}$; $p = \frac{1}{2}$; $n = 7$. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு காட்டும் ஈருறுப்பு விரிப்பு $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^7$.

(i) சரியாக 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= 7\,C_4\,q^3 p^4$
$$= 7\,C_3\,(\tfrac{1}{2})^7.$$

(ii) குறைந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு
$$= 7\,C_4\,q^3\,p^4 + 7\,C_5\,q^2\,p^5 + 7\,C_6\,q\,p^6 + p^7$$
$$= 7\,C_4\,(\tfrac{1}{2})^7 + C_5\,(\tfrac{1}{2})^7 + 7\,C_6\,(\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{1}{2})^7$$
$$= (\tfrac{1}{2})^7\,\{7\,C_3 + 7\,C_2 + 7\,C_1 + 7\,C_0\}$$

(iii) மிகுந்தது 4 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= (q)^7 + 7C_1 q^6 p + 7C_2 q^5 p^2 + 7C_3 q^4 p^3 + 7C_4 q^3 p^4$$
$$= (\tfrac{1}{2})^7 \{7C_0 + 7C_1 + 7C_2 + 7C_3 + 7C_4\}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு கம்பெனிக்கு 6 கப்பல்கள் உள்ளன. ஒரு கடல் பிரயாணத்தில் எந்தவொரு கப்பலும் நாசமாவதற்குரிய நிகழ்தகவு 0·02 ஆகும். எனில், (அ) ஒரு கப்பலை, (ஆ) மிகுந்தது இரண்டு கப்பலை இழப்பதற்குள்ள நிகழ்தகவினையும், ஒரு கப்பலையும் இழக்காமலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவினையும் காண்க. (செ.ப.)

இங்கு $p = 0{\cdot}02 = \dfrac{1}{50}$

$q = \dfrac{49}{50}$

வேண்டிய ஈருறுப்பு விரிப்பு

$$= \left(\frac{49}{50} + \frac{1}{50}\right)^6$$

(அ) ஒரு கப்பலை இழப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= 6C_1 q^6 p$$
$$= 6. \left(\frac{49}{50}\right)^6 \left(\frac{1}{50}\right)$$

(ஆ) மிகுந்தது 2 கப்பல்களை இழப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \left(\frac{49}{50}\right)^6 + 6C_1 \left(\frac{49}{50}\right)^5 \left(\frac{1}{50}\right) + 6C_2 \left(\frac{49}{50}\right)\left(\frac{1}{50}\right)^2$$

(இ) ஒரு கப்பலும் இழக்காமலிருப்பதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= \left(\frac{46}{50}\right)^6.$$

பயிற்சி

1. 50 புத்தகங்களில் 3 மிகச் சிறந்த புத்தகங்களாகும். ஒரு திருடன் இங்கும் அங்குமாக 5 புத்தகங்களை எடுத்துச் சென்று விடுகிறான். (i) அம் மூன்றினில் எடுக்காமலிருக்கும் நிலை, (ii) அம்மூன்றில் இரண்டு எடுக்கப்பட்ட நிலைக்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

2. பிறப்பு விகிதம் ஆண் : பெண் = 51: 49. ஒரு மகப் பேறு மருத்துவ விடுதியில் ஒரே நாளில் பிறந்த 10 குழந்தைகளில் 8 அல்லது 8-க்கு மேற்பட்டவை பெண் குழந்தைகளாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

3. ஒரு பையில் 8 வெள்ளை, 6 கருப்புப் பந்துகள் உள. 5 பந்துகள் எடுத்தால், (i) 3 வெள்ளையாகவும், (ii) 3 அல்லது 3-க்கு மேற்பட்டன வெள்ளையாகவும் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

4. ஒரு பையில் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள. 4 பந்துகளை நான் எடுக்கிறேன். எனில், குறைந்தது ஒரு கருப்புப் பந்தாவது இருப்ப தற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? (செ.ப.)

5. நீண்ட ஒரு கணக்குப்படி, ஒவ்வொரு நூற்றிற்கும் 3 கப்பல்கள் மூழ்கின. 10 கப்பல்கள் பிரயாணத்தைத் தொடங்கின. (i) 6 கப்பல்கள் பத்திரமாகக் கரை சேர்வதற்கு, (ii) குறைந்தது 6 கப்பல்கள் பத்திர மாகக் கரை சேர்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

6. இங்குமங்குமாக ஏழு தேதிகள் குறிக்கப்பட்டன. அவை களில், (i) சரியாக 5 ஞாயிறும், (ii) குறைந்தது 5 ஞாயிறும், (iii) முதல் ஐந்து மட்டுமே ஞாயிறாக வும் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

7. ஒருதலைச் சார்பற்ற 16 நாணயங்கள் ஒரே தடவையில் சுண்டப்பட்டன. (1) சரியாக 8 தலைகள், (2) சரியாக 11 தலைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (செ.ப.)

8. ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 10 சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. (i) குறைந்தது 1 ஏஸாக, (2) குறைந்தது 2 ஏஸாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் யாவை? (செ.ப.)

9. '*QUESTION*' என்ற சொல்லில், எழுத்துகள் வரிசை யாக மாறிமாறி எழுதப்பட்டன. '*Q*', '*U*' ஆகிய

எழுத்துகளுக்கிடையே சரியாக இரண்டு எழுத்துகள் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(செ.ப.)

10. X, Y என்பவர்கள் 10 பேர்களுடன் இங்குமங்குமாக ஒரு வரிசையில் நிற்கின்றனர். X, Y-க்கு இடையே மூவர் நிற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(செ.ப.)

11. ஒரு நாணயம் 10 தடவைகள் சுண்டப்படுகிறது. கடைசி மூன்று சுண்டுதலில் பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக, முதல் ஏழு சுண்டுதலில் தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

(தி.ப.)

லாகரிதங்கள்
(Logarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	5 9 13 4 8 12	17 21 26 16 20 24	30 34 38 28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 12 4 7 11	16 20 23 15 18 22	27 31 35 26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 11 3 7 10	14 18 21 14 17 20	25 28 32 24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 6 10 3 7 10	13 16 19 13 16 19	23 26 29 22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9 3 6 9	12 15 19 12 14 17	22 25 28 20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 9 3 6 8	11 14 17 11 14 17	20 23 26 19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 6 8 3 5 8	11 14 16 10 13 16	19 22 24 18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8 3 5 8	10 13 15 10 12 15	18 20 23 17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7 2 4 7	9 12 14 9 11 14	17 19 21 16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7 2 4 6	9 11 13 8 11 13	16 18 20 15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

லாகரிதங்கள்
(Logarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர்லாகரிதங்கள்
(Antilogarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர்லாகரிதங்கள்
(Antilogarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31[illegible]	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	323[illegible]	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	363[illegible]	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	436[illegible]	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	562[illegible]	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	631[illegible]	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7351	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	86[illegible]0	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(BIBLIOGRAPHY)

1. Asthana, B. N. — Elements of Statistics.
2. Asthana, B. N. and Srivastava, S. S. — Applied Statistics of India.
3. Boddington, A. L. — Statistics and their application to Commerce.
4. Bowley, A. L. — Elements of Statistics.
5. Croxton and Cowden — Applied General Statistics.
6. Croxton and Cowden — Practical Business Statistics.
7. Connar, L. R. — Statistics in Theory and Practice.
8. Dubey and Agarwal — Elementary Statistics.
9. Elhance, D. N. — Fundamentals of Statistics.
10. Elhance, D. N. — Economic Statistics of India since Independence.
11. Fisher, R. A. — Statistical Methods for Research Workers.
12. Fisher Irving — The Making of Index Number.
13. Freund and Williams — Modern Business Statistics.
14. Ghosh and Chaudhri — Statistics Theory and Practice.
15. Gupta, S. P. — Statistical Methods.
16. Jones, D. C. — A First Course in Statistics.
17. Mills — Statistical Methods.
18. Seetharaman — A Text Book of Statistics.
19. Stockton, John R. — Business Statistics.
20. Sivathanu Pillai, M. — Elements of Statistics.
21. Tippet L. H. C. — Statistics.
22. Uspensky — Probability.
23. Venkatesan, K. — Statistics.
24. Wilks, S. S. — Elementary Statistical Analysis.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute Value — எண் அளவை மதிப்பு
Add — கூட்டு
Addition — கூட்டல்
Algebra — இயற்கணிதம்
Analysis — பகுப்புணர்தல், பகுப்பாய்வு
Analysis of Variance — பரவற்படி ஆய்வு
Answer — விடை
Aposteriori — காரியகாரண
Aposteriori Probability — காரியகாரண நிகழ்தகவு
Apriori Probability — காரணகாரிய நிகழ்தகவு
Arithmetic Mean — கூட்டுச் சராசரி
Arithmetic Progression — கூட்டுத் தொடர்
Ascending order — ஏறுவரிசை
Association — தொடர்பு; உறவு
Association of Attributes — பண்புகளின் உறவு
Asymmetrical — சமச்சீரில்லாத
Attribute — பண்பு
Average — சராசரி
Average Deviation — சராசரி விலக்கம்
Axes of Co-ordinates — அச்சுகள்

B

Bell-shaped — மணிவடிவமான
Best fit — மிகச் சிறந்த பொருத்தம்
Biased — ஒருசார்பான, ஒருதலைப்பட்ட
Binomial — ஈருறுப்பு
Binomial Distribution — ஈருறுப்புப் பரவல்
Binomial Theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Bivariate — இருமாறி
Blank — வெற்றிட

C

Census	— மக்கட் கணிப்பு
Census Methods	— முழுக்கணிப்பு முறைகள்
Chart	— வரைபடம்
Chi-square	— கைவர்க்கம்
Class	— பிரிவு
Class Limit	— பிரிவின் எல்லை
Classification	— பாகுபாடு
Coefficient	— கெழு
Computation	— கணிப்பு, கணக்கிடுதல்
Computer	— கணணி
Constant	— நிலையெண்
Contingency Table	— நேர்வுப் பட்டியல்
Continuous Curve	— தொடர் வரை
Continuous Function	— தொடர்புடைச் சார்பு
Convention	— வழக்கு, மரபு
Correlation	— ஒட்டுறவு, இடையுறவு
Correlation Coefficient	— ஒட்டுறவுக் கெழு
Cost of Living Index Number	— வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்
Cumulative	— குவிவு
Cumulative Curve	— குவிவு வரை
Cumulative Frequency	— குவிவு அலைவெண், குவிவு நிகழ்வெண்

D

Degrees of Freedom	— சமன்பாட்டுப் படி
Design	— திட்ட அமைப்பு, உருவ அமைப்பு
Deviation	— விலக்கம், விலகல்
,, Absolute	— எண் அளவை விலக்கம்
,, Average	— சராசரி விலக்கம்
,, Mean	— கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, Quartile	— கால்மான விலக்கம்
,, Standard	— திட்ட விலக்கம், தரவிலக்கம்
Diagram	— விளக்கப் படம்
,, Bar	— பட்டை விளக்கப் படம்
,, Pie	— வட்ட விளக்கப் படம்
,, Scatter	— சிதறல் விளக்கப் படம்

Discontinuous Function — தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Dispersion — பரவுகை
Distribution — பரவல்
" Binomial — ஈருறுப்புப் பரவல்
" Bivariate — இருமாறிப் பரவல்
" Continuous — தொடர் பரவல்
" Cumulative — குவிவுப் பரவல்
" Discrete — தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
" Frequency — அலைவெண் பரவல், அலைவுப் பரவல்
" J-Shaped — J-வடிவப் பரவல்
" Normal — சமச்சீர் பரவல், இயல்நிலைப் பரவல்
" Poisson — பாய்ஸான் பரவல்
" Sampling — கூறு பண்புகளின் பரவல், மாதிரிப் பரவல்
" Students 'T' — 'T'. பரவல்
" Skew — சீரிலாப் பரவல், கோட்டப் பரவல்
" 'U' Shaped — 'U' வடிவப் பரவல்
" x^2 — கைவர்க்கப் பரவல்
Divide — வகு

E

Element — மூலகம், உறுப்பு
Ellipse — நீள்வட்டம்
Empirical Formula — நடைமுறைச் சூத்திரம்
Enquiry — கணக்கெடுப்பு
Enumeration — எண்ணெடுப்பு, சேகரித்தல்
Enumerator — செய்தி சேகரிப்பவர்
Equal — சமம்
Equation — சமன்பாடு
Error — பிழை
Estimate — மதிப்பிடு
Event — நிகழ்ச்சி
" Independent — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
" Mutually Exclusive — ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சி

F

F-Test — F-சோதனை
Formula — சூத்திரம்
Frequency — அலைவெண், நிகழ்வெண்
Function — சார்பு

G

Graph — வரைபடம்
Graph Sheet — வரை படத்தாள்

H

Height — உயரம்
Histogram — செவ்வகப் படம்
Hypothesis — எடுகோள்
,, Testing of — எடுகோள் சோதனை

I

Index Number — குறியீட்டெண்
Inflexion, Point of — திருகுபுள்ளி, வளைவு மாற்றப் புள்ளி
Interpolation — இடைச்செருகல்

K

Kurtosis — தட்டை அளவு
,, Leptokurtic — குறைத்தட்டை
,, Platykurtic — மிகைத்தட்டை

L

Large Samples — பெறுங்கூறுகள்
Law — விதி
Law of Inertia of Large Numbers — பெரிய எண்களின் நிலைத் தன்மை விதி
Law of Statistical Regularity — புள்ளிவிவர ஒழுங்கு விதி
Limit — எல்லை, நெருக்க மதிப்பு
,, Lower — கீழ் எல்லை
,, Upper — மேல் எல்லை
,, Confidence — நம்பக வரம்புகள்

Line — கோடு
„ Straight — நேர்கோடு
Line Diagram — நேர்கோட்டு விளக்கப் படம்
Linear — ஒருபடி
Logarithm — லாகரிதம்

M

Mark — அலைவெண் குறி, குறி
Mathematics — கணிதம்
Mean — கூட்டுச் சராசரி
„ Arithmetic — கூட்டுச் சராசரி
„ Geometric — பெருக்குச் சராசரி
„ Harmonic — ஹார்மோனிக் சராசரி, இசைச் சராசரி
„ Weighted — நிறையிட்ட சராசரி
Measures — அளவைகள்
„ of Central Tendency — மையப் போக்கின் அளவைகள்
„ Dispersion — பரவுகை அளவைகள்
„ Skewness — கோட்ட அளவைகள்
Median — இடைநிலை
„ Class — இடைநிலைப் பிரிவு
Million — மில்லியன், பத்து இலட்சம்
Minus — கழி
Mode — முகடு
Model Class — முகட்டுப் பிரிவு
Moment — விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Multiply — பெருக்கு

N

National Income — தேசீய வருமானம்
National Sample Survey — தேசீய மாதிரி அளவெடுப்பு
Negative — எதிர்மறை
„ Number — எதிர்மறை எண்
Nonsense Correlation — பொருளற்ற ஒட்டுறவு
Notation — குறியீடு
Number — எண்
Natural Numbers — இயல் எண்கள்

O

Observation — நேரில் காணல்
Observed Data — நேரில் கண்ட புள்ளி விவரம்
Ogive — ஓகைவ்
„ Less than — கீழின ஓகைவ்
„ More than — மேலின ஓகைவ்
Origin — மூலப்புள்ளி

P

Pair — ஜோடி
Parabola — பரவளைவு
Parameter — புள்ளியியல் பண்பளவை, சுட்டுறுப்பு
Percent — சதவீதம்
Period — காலம்
Permutation — வரிசை மாற்றம்
Population — முழுமைத் தொகுதி, இனத் தொகுதி
„ Finite — வரம்புடை முழுமைத் தொகுதி
„ Infinite — எண்ணற்ற முழுமைத் தொகுதி
Positive — நேர்மறை
Probability — நிகழ்தகவு
Problem — உத்திக் கணக்கு, கணக்கு
Procedure — வழிமுறை, செய்முறை
Product — பெருக்கம்

Q

Quality Control — தரக் கட்டுப்பாடு
Quantitative Data — எண் அளவைப் புள்ளிவிவரம்
Quartile — கால்மானம்
Questionnaire — வினுப் பட்டியல்

R

Random Sample — ராண்டம் மாதிரி, சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
Rank — தரம்

கலைச்செ



Rank C
Ratio
Raw Da,

Real
Reasoni
Regressi
Regular
Root

Square r
Sample
Larg
Smal
Sampling

Sampling
"
"
"
"
"
"
Scatter
"
Series
Significar
"
Skewness
"
"
Solution
Solve
Standard
Standard

Statistic
Statistics
Symmetr

